–0– (PRE)CORSO DI MATEMATICA
ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 0.1) Provare che, per ogni angolo α, si ha

0.1.a) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ (per 0.1.c e 0.1.d),

0.1.b) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ vedi anche testo

0.1.c) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ adottato del "PRECORSO",

0.1.d) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ ["PARTE 1", pag. 30)

1° modo: Applicando le formule di addizione e sottrazione del seno e coseno, si ha

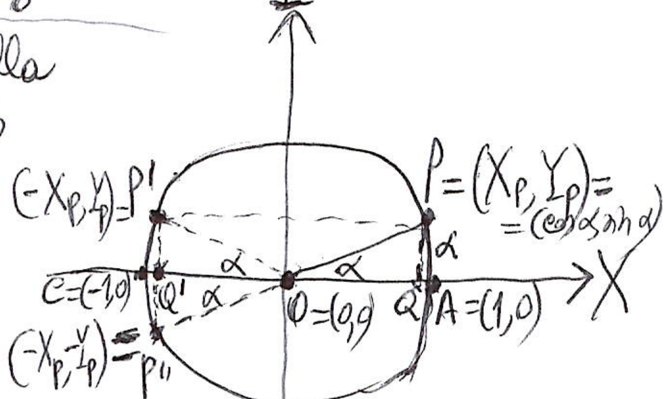
a) $\sin(\pi+\alpha) = \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos\alpha + \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\sin\alpha = -\sin\alpha$

b) $\cos(\pi+\alpha) = \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos\alpha - \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\alpha = -\cos\alpha$

c) $\sin(\pi-\alpha) = \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos\alpha - \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\sin\alpha = \sin\alpha$

d) $\cos(\pi-\alpha) = \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos\alpha + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\alpha = -\cos\alpha$, come si voleva dimostrare.

2° modo: Se l'angolo $A\hat{O}P$ misura α, sulla circonferenza goniometrica, allora l'angolo $A\hat{O}P'$ misura $\pi-\alpha$. Di conseguenza, l'angolo $C\hat{O}P'$ misura α. Allora i triangoli OQP e $OQ'P'$ hanno due angoli uguali (quello che misura α e l'angolo retto rispettivamente in Q e in Q') e, per differenza, hanno tutti e 3 gli angoli uguali (la somma degli angoli interni di ogni triangolo è sempre π). Inoltre i lati OP e OP' sono uguali (sono due raggi). Quindi, per i criteri di congruenza, i due triangoli OQP e $OQ'P'$ sono congruenti, e pertanto $Q'P' = QP$, cioè, rispettivamente, $\boxed{\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha}$. Inoltre, OQ e OQ' hanno la stessa lunghezza, ma verso opposto (il primo segmento è "orientato verso destra", l'altro, "verso sinistra"), quindi $\boxed{\cos(\pi-\alpha)} = OQ' = -OQ = \boxed{-\cos\alpha}$. Inoltre notiamo che l'angolo $A\hat{O}P''$ (quello che "passa" per i punti P e P') misura $\pi+\alpha$, e quindi l'angolo $C\hat{O}P''$ misura α. Analogamente come nel caso precedente, si ha che i triangoli OQP e $OQ'P''$ sono congruenti, e si ha: $\boxed{\sin(\pi+\alpha)} = Q'P'' = -QP = \boxed{-\sin\alpha}$; $\boxed{\cos(\pi+\alpha)} = OQ' = -OQ = \boxed{-\cos\alpha}$.



1.1 Esercizio: Determinare l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (1, 2)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -3x + 2$.

Sia $y = mx + q$ l'equazione della retta s. Notiamo che $m = \frac{1}{3}$, perché il coefficiente angolare della retta r è -3, e m dev'essere contemporaneamente RECIPROCO e OPPOSTO rispetto a -3, quindi $m = \frac{1}{3}$. [Naturalmente, questo ci dice anche che la retta s è OBLIQUA]. Quindi possiamo scrivere che l'equazione della retta s è $y = \frac{1}{3}x + q$, ove q viene determinato imponendo il passaggio per il punto $P_0 = (1, 2)$. Ciò vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 2, l'equazione $y = \frac{1}{3}x + q$ deve diventare un'identità. Quindi si deve avere

$$2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + q, \quad \text{da cui} \quad q = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Pertanto l'equazione della retta s è $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

1.2. Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s parallela alla retta $y = -\frac{1}{2}x - 9$ e passante per il punto $Q_0 = (2, 0)$.

Sia $y = mx + q$ l'equazione della retta s. Essendo parallela alla retta $y = -\frac{1}{2}x - 9$, si ha che $m = -\frac{1}{2}$, in quanto due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare (o sono entrambe verticali, per essere precisi). Ora, scrivendo l'equazione della retta s come

$(+_0)$ $y = -\frac{1}{2}x + q$, determiniamo q imponendo il passaggio per il punto $Q_0 = (2, 0)$. Quindi la relazione $(+_0)$ dev'essere verificata se al posto di x ci mettiamo 2 e se al posto di y ci mettiamo 0. Otteniamo $0 = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} + q$, da cui $\boxed{q = 1}$.

Pertanto l'equazione della retta s è $y = -\frac{1}{2}x + 1$

1.3 Esercizio/domanda: A quanto è uguale il coefficiente angolare di una retta orizzontale?

Risposta $\boxed{m=0}$

Perché? Perché una retta orizzontale è del tipo $y=k$, ovvero $\boxed{y=q}$, con k (o q) reale (qualsiasi). Allora, nell'equazione generale della retta, si deve avere $mx+q=q$. Ma q è una costante: quindi, per scriverla come polinomio di primo grado in x, dobbiamo scrivere $q=0\cdot x+q$, quindi si deve avere $mx+q=0x+q$. Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti nella x devono essere uguali, e quindi si ha $\boxed{m=0}$.

[N.B.: una retta verticale è del tipo $x=x_0$, e quindi il suo coefficiente angolare non esiste]

Es. 1.4. Determinare l'equazione della retta s perpendicolare alla retta (r) $y=2x$ e passante per il punto $Q_0=(2,0)$.

Sia $y=mx+q$ l'equazione della retta s. Siccome r ed s sono perpendicolari, i rispettivi coefficienti angolari di r e di s devono essere contemporaneamente RECIPROCI e OPPOSTI. Pertanto $m=-\frac{1}{2}$, perché $-\frac{1}{2}$ è il "reciproco e opposto" di 2. Ora, procedendo come nell'esercizio 1.2, si ottiene $q=1$ (imponendo il passaggio per il punto $Q_0=(2,0)$).
L'equazione della retta s è $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Esercizio 1.5. Determinare l'equazione della retta s parallela alla retta r di equazione $y=\frac{1}{3}x-19$ e passante per il punto $P_0=(1,2)$.
Sia $y=mx+q$ l'equazione della retta s. Siccome due rette (non verticali) sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, allora si ha che $\boxed{m=\frac{1}{3}}$. Imponendo il passaggio per il punto $P_0=(1,2)$ e procedendo come nell'esercizio 1.1, si trova $q=\frac{5}{3}$. Dunque, l'equazione della retta s è: $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Esercizio 1.16) Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(-1,10)$, $B=(3,6)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx+q$
Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(-1,10)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 10, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $10=-m+q$, da cui $\boxed{q=10+m}$.
Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(3,6)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $\boxed{6=3m+q}$. Ma sappiamo che $q=10+m$, quindi sostituendo $10+m$ qui al posto di q, si ha $6=3m+10+m$, cioè $6-10=3m+m$, ossia $-4=4m$.
Dividendo ambo i membri per 4, si ottiene $-1=m$. Quindi $\boxed{m=-1}$
Ora, tenendo conto che $q=10+m$, si ha $\boxed{q}=10-1=\boxed{9}$. Pertanto l'equazione della retta s è $\boxed{y=-x+9}$.

1.17 Allo stesso risultato si giunge se si considera la formula
$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, ove $x_0=-1$, $y_0=10$, $x_1=3$, $y_1=6$, ottenendo
$\frac{y-10}{6-10}=\frac{x+1}{3+1}$, cioè $\frac{y-10}{-4}=\frac{x+1}{4}$, da cui $\boxed{y-10}=-(x+1)=$
$=\boxed{-x-1}$, e quindi $\boxed{y}=-x-1+10=\boxed{-x+9}$. Si ottiene sempre l'equazione
$$\boxed{y=-x+9}$$

EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE PASSANTI PER UN PUNTO (x_0, y_0)

(PER UN PUNTO PASSANO INFINITE RETTE)

Preliminarmente, vediamo che cosa vuol dire il passaggio per un punto e come si impone una condizione di questo tipo nell'equazione di una retta (non verticale) $y = mx + q$

Esercizio 18. Esempio: la retta $y = 2x + 1$ passa per il punto $(1,3)$? Come si risponde a domande di questo tipo? Nell'equazione $y = 2x + 1$, al posto di x si mette 1, al posto di y si mette 3 (perché la coordinata x, cioè l'ascissa, del punto $(1,3)$ è 1, mentre la coordinata y, cioè l'ordinata, del punto $(1,3)$ è 3): se si ottiene un'uguaglianza sempre vera, allora la nostra retta passa per il nostro punto; se si ottiene un'espressione sempre falsa, allora la retta non passa per quel punto.

Da $y = 2x + 1$, sostituendo x con 1 ed y con 3 si ottiene $\boxed{3} = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = \boxed{3}$, che è sempre $\boxed{\text{vero}}$. Pertanto la retta di equazione $y = 2x + 1$ passa per il punto $(1,3)$.
Facciamo vedere che questa retta non passa per $(2,6)$. Se in $y = 2x + 1$ sostituiamo x con 2 ed y con 6, si ha $\boxed{6} = 2 \cdot 2 + 1 = \boxed{5}$, che è ovviamente falso. Quindi la retta $y = 2x + 1$ non passa per il punto $(2,6)$.

Ora fissiamo un generico punto (x_0, y_0) e determiniamo il fascio di tutte le rette passanti per (x_0, y_0) (tranne quella VERTICALE). L'equazione generica di una retta (non verticale) è $y = mx + q$. Se al posto di x ci mettiamo x_0 e sostituiamo y con y_0, si ottiene $y_0 = mx_0 + q$ (perché si deve avere una uguaglianza sempre vera, come detto sopra), con gli stessi m e q.

Da $y = mx + q$ si ottiene $y - mx = q$, mentre da $y_0 = mx_0 + q$ si ricava $y_0 - mx_0 = q$. Ma, come abbiamo detto alla fine della pagina precedente, q è lo stesso, e pertanto $y - mx = y_0 - mx_0$. Sottraendo y_0 ad entrambi i membri, si ha $\boxed{y - mx - y_0} = y_0 - mx_0 - y_0 = \boxed{-mx_0}$.
Aggiungendo mx al primo e all'ultimo termine, otteniamo $y - mx - y_0 + mx = mx - mx_0 = m(x - x_0)$, cioè

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

che è l'equazione del fascio di rette passanti per il punto (x_0, y_0) (escludendo la retta verticale).

1.9) Esempio/esercizio: Scrivere l'equazione della retta r passante per il punto $P_0 = (6, 20)$ e perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x - 11$.

Innanzi tutto, osserviamo che il coefficiente angolare m della retta r dev'essere reciproco e opposto rispetto a $-\frac{1}{3}$, e quindi sarà uguale a 3. Quindi $\boxed{m = 3}$. Siccome la retta r passa per $(6, 20)$, allora l'espressione

$y - y_0 = m(x - x_0)$ (cioè l'equazione del fascio di rette passanti per (x_0, y_0))

dev'essere soddisfatta se al posto di x_0 ci mettiamo 6 e se al posto di y_0 ci mettiamo 20 (e se al posto di m ci mettiamo 3). Dunque, si ottiene

$y - 20 = 3(x - 6)$, cioè $y - 20 = 3x - 18$, ossia, sommando 20 in entrambi i membri, $y = y - 20 + 20 = 3x - 18 + 20 = 3x + 2$. Quindi $\boxed{y = 3x + 2}$ è l'equazione della retta r.

Ora, notiamo che, mentre per un punto passano infinite rette, si ha che

PER DUE PUNTI DISTINTI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA.

1.1) <u>Esempio/esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti $P_1 = (1, 11)$ e $P_2 = (2, 15)$

Innanzi tutto, i due punti P_1 e P_2 non hanno la stessa ascissa (se $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, si ha: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$) e pertanto la retta r non è verticale. (Tra l'altro, i due punti P_1 e P_2 non hanno la stessa ordinata, in quanto $y_1 = 11$, $y_2 = 15$, e quindi la retta r non è orizzontale). Quindi, la nostra retta r è obliqua. Comunque ci basta che r non sia verticale per poter scrivere l'equazione della retta r nella forma

$$(\bullet) \quad y = mx + q$$

Adesso dobbiamo determinare m e q in modo tale che la nostra retta r passi per i punti P_1 e P_2. Il passaggio per il punto P_1 sta a indicare che, se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 11, la condizione $(\bullet)$ deve essere verificata. Si deve avere quindi: $11 = 1 \cdot m + q$, cioè $\boxed{m + q = 11}$. Imponiamo ora il passaggio per il punto P_2: ciò vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 2 e se al posto di y ci mettiamo 15, allora la condizione $(\bullet)$ deve essere soddisfatta, ottenendo $15 = 2m + q$. Quindi si ottengono le seguenti due equazioni, dove le incognite sono m e q:

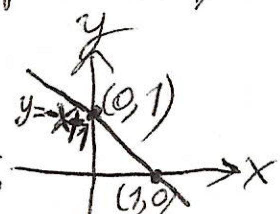
$\begin{cases} m+q=11 \\ 2m+q=15 \end{cases}$ Dalla prima di queste due equazioni si ottiene $\boxed{q=11-m}$.

Sostituendo q con $11-m$ nella seconda equazione, si ha $2m+11-m=15$, cioè $m+11=15$, da cui $\boxed{m}=15-11=\boxed{4}$. Siccome $q=11-m$, allora $\boxed{q}=11-4=\boxed{7}$.

Quindi l'equazione della retta r è

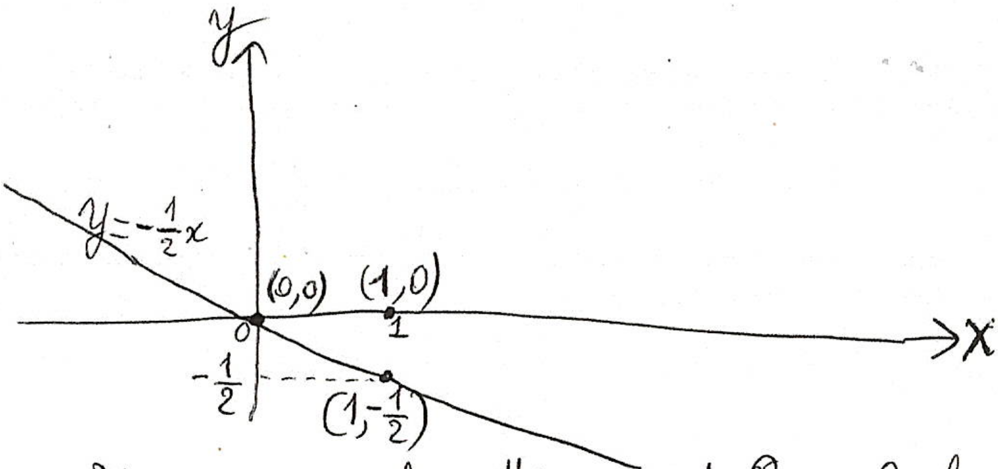
$$\boxed{y=4x+7}.$$

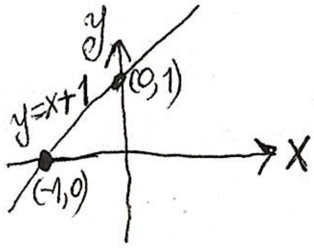
1.11) Ora, vediamo un altro tipo di esercizio: "Disegnare" la retta di equazione $y=mx+q$, $m\neq 0$. Siccome per due punti distinti passa UNA E UNA SOLA RETTA, allora sarà sufficiente determinare due punti di questa retta. Per fare le cose in modo semplice, conviene vedere che cosa succede per $x=0$ (quindi determinare l'intersezione della retta con l'asse delle y) e per $y=0$ (cioè determinare l'intersezione della retta con l'asse delle x). Abbiamo visto che, da $y=mx+q$, per $x=0$ si ha $y=q$ (quindi la retta passa per il punto $(0,q)$) e per $y=0$ si ha $mx+q=0$, cioè $mx=-q$, da cui $x=-\frac{q}{m}$ (pertanto la retta passa per il punto $(-\frac{q}{m},0)$). Quindi i punti $(0,q)$ e $(-\frac{q}{m},0)$ "determinano" la nostra retta.



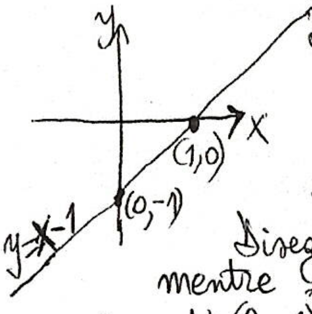
Facciamo un esempio: "disegniamo" la retta $y=-x+1$. Per $x=0$ si ha $y=1$ (quindi la retta passa per il punto $(0,1)$), mentre per $y=0$ si ha $0=-x+1$, cioè, aggiungendo x in entrambi i membri, $x=x-x+1$, ossia $x=1$ (quindi la retta passa per il punto $(1,0)$). Quindi disegneremo i punti $(0,1)$, $(1,0)$ e la retta congiungente questi due punti sarà la retta data.

1.12) Se invece vogliamo disegnare la retta $y=-\frac{1}{2}x$ (oppure una qualsiasi retta obliqua passante per l'origine), allora notiamo che per $x=0$ si ha $y=0$ (come sappiamo, la nostra retta passa per il punto $(0,0)$). Siccome non possiamo scegliere $y=0$, allora prenderemo, per esempio, $x=1$, e in corrispondenza troveremo il punto $y=-\frac{1}{2}$. Dunque, la retta passa per il punto $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ e allora disegneremo la retta congiungente i punti $(0,0)$ ed $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, tenendo conto che per due punti distinti passa <u>UNA</u> e <u>UNA SOLA RETTA</u>.

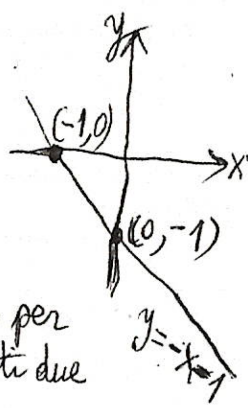




Disegniamo ora la retta $y=x+1$. Per $x=0$ si ha $y=1$ (quindi la retta passa per il punto $(0,1)$), mentre per $y=0$ è $0=x+1$, quindi $x=-1$ (pertanto la retta passa per $(-1,0)$). Quindi disegniamo i punti $(-1,0)$, $(0,1)$ e la retta congiungente questi punti sarà la retta data ($y=x+1$).



Disegniamo la retta $y=x-1$. Per $x=0$, è $y=-1$, mentre per $y=0$ è $x=1$: quindi la retta passa per i punti $(0,-1)$ e $(1,0)$: la retta congiungente questi due punti sarà la retta di equazione $y=x-1$.



Disegniamo infine la retta $y=-x-1$. Per $x=0$, è $y=-1$, mentre per $y=0$ è $0=-x-1$, quindi $x=-1$. La retta passa per i punti $(0,-1)$ e $(-1,0)$, e pertanto la retta congiungente questi due punti sarà la retta di equazione $y=-x-1$.

ATTENZIONE!!!

N.B.: “Disegnare” le quattro rette

$$y = x+1, \quad y = -x+1, \quad y = x-1, \quad y = -x-1$$

è <u>IMPORTANTISSIMO</u> nello studio delle equazioni e disequazioni trigonometriche, perché permette di “<u>visualizzare</u>” le equazioni e disequazioni ~~con~~ l'aiuto della <u>circonferenza goniometrica</u> !!!

1.13) <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $O=(0,0)$ e $B=(3,-2)$.

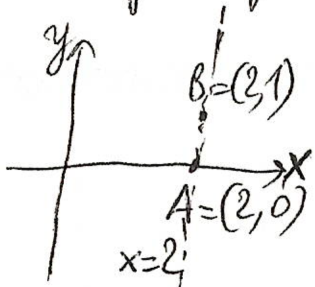
Notiamo che l'equazione del fascio di rette passanti per l'origine (tranne quella <u>verticale</u>) è data da $y=mx$, come l'intuizione suggerisce. Infatti, se una retta del tipo $y=mx+q$ passa per l'origine $(0,0)$, allora nell'espressione $y=mx+q$, se al posto di x ci mettiamo 0 e al posto di y ci mettiamo 0, allora si ha: $0=0\cdot m+q=q$, quindi $\boxed{q=0}$. Quindi, in tutte le rette passanti per l'origine (tranne quella verticale) si ha $q=0$; quindi l'equazione del fascio di rette passanti per l'origine si riduce a $\boxed{y=mx}$. Tra l'altro, l'espressione $y=mx$ si può ricavare dall'equazione del fascio di rette passanti per un punto generico (x_0,y_0) del piano cartesiano (esclusa, naturalmente, quella verticale)

$y-y_0=m\cdot(x-x_0)$, considerando il punto $(x_0,y_0)=(0,0)$ (cioè sostituendo qui x_0 con 0 ed y_0 con 0).

Detto questo, ora, per determinare m, imponiamo il passaggio per il punto $B=(3,-2)$, usando direttamente l'espressione $y=mx$. Per determinare m, sostituiamo x con 3 ed y con -2 (perché per questi valori di x ed y, l'espressione $y=mx$ diventa un'uguaglianza vera). Si ottiene allora $-2=3m$, cioè $-\frac{2}{3}=m$. Pertanto $\boxed{m=-\frac{2}{3}}$, e allora l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=-\frac{2}{3}x}.$$

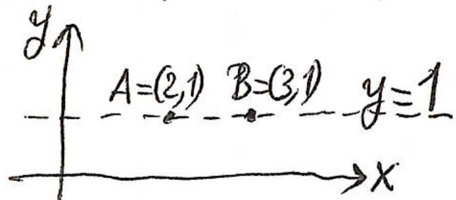
Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.14 $A = (2,0)$, $B = (2,1)$.



Notiamo che A e B hanno la stessa ascissa $(x=2)$, pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x = x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 2). Allora l'equazione della retta s è

$$\boxed{x = 2}.$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i
1.15 punti $A = (2,1)$, $B = (3,1)$.



Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata $(y=1)$, e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y = k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 1). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = 1}.$$

1.16 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=\left(\frac{1}{9},-1\right)$, $B=\left(\frac{1}{9},\frac{6}{5}\right)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa $\left(x=\frac{1}{9}\right)$, e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x=x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{1}{9}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=\frac{1}{9}}\,.$$

1.17 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=\left(0,\frac{4}{3}\right)$, $B=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{3}\right)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata $\left(y=\frac{4}{3}\right)$, e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y=k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè nel nostro caso, $\frac{4}{3}$). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=\frac{4}{3}}\,.$$

1.18 <u>Esercizio:</u> Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(-\frac{1}{3}, 6)$, $B=(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3})$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa $(x=-\frac{1}{3})$, e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x=x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $-\frac{1}{3}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=-\frac{1}{3}}.$$

1.19 <u>Esercizio:</u> Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(2, \frac{1}{5})$, $B=(-3, \frac{1}{5})$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata $(y=\frac{1}{5})$, e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y=k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè nel nostro caso, $\frac{1}{5}$). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=\frac{1}{5}}.$$

1.20 <u>Esercizio:</u> Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
$A=\left(\frac{13}{2},-5\right)$, $B=\left(\frac{13}{2},0\right)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa $\left(x=\frac{13}{2}\right)$, e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x=x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{13}{2}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=\frac{13}{2}}.$$

1.21 <u>Esercizio:</u> Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
$A=(1,-4)$, $B=\left(\frac{5}{7},-4\right)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata $(y=-4)$, e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y=k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè nel nostro caso, -4). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=-4}.$$

1.22 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(3,4)$, $B=(3,6)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x=3$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x=x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 3). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=3}.$$

1.23) <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(1,5)$, $B=(-2,5)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y=5$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y=k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè nel nostro caso, 5). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=5}.$$

1.24 **Esercizio:** Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(\frac{1}{2},3)$, $B=(\frac{1}{2},5)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x=\frac{1}{2}$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x=x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{1}{2}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}.$$

1.25 **Esercizio:** Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(1,\frac{2}{5})$, $B=(-4,\frac{2}{5})$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y=\frac{2}{5}$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y=k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè nel nostro caso, $\frac{2}{5}$). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=\frac{2}{5}}.$$

Esercizio 1.26 Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(-2,-3)$, $B=(1,2)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y=mx+q$.

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(-2,-3)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -2 e al posto di y ci mettiamo -3, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deve essere verificata, cioè si deve avere $-3=-2m+q$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(1,2)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 2, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deve essere verificata, ossia si deve avere $2=m+q$. Quindi

$$\begin{cases} -2m+q=-3 \\ m+q=2 \end{cases}$$

(cioè $q=2-m$)

(sistema lineare di 1° grado con incognite m e q)

Sostituendo $\boxed{q=2-m}$ nella 1ª equazione, si ha $-2m+2-m=-3$, cioè $-2m-m=-3-2$, ossia $-3m=-5$, cioè $3m=5$, da cui $m=\frac{5}{3}$. Tornando all'espressione $q=2-m$, sostituendo m con $\frac{5}{3}$ si ottiene $\boxed{q=}2-\frac{5}{3}=\frac{6}{3}-\frac{5}{3}=\frac{6-5}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$. Essendo $\boxed{m=\frac{5}{3}}$, $\boxed{q=\frac{1}{3}}$, l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}}.$$

Esercizio 1.27 Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(-1,10)$, $B=(3,6)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y=mx+q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(-1,10)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 10, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $10=-m+q$, da cui $\boxed{q=10+m}$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(3,6)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $\boxed{6=3m+q}$. Ma sappiamo che $q=10+m$, quindi sostituendo $10+m$ qui al posto di q, si ha $6=3m+10+m$, cioè $6-10=3m+m$, ossia $-4=4m$. Dividendo ambo i membri per 4, si ottiene $-1=m$. Quindi $\boxed{m=-1}$
Ora, tenendo conto che $q=10+m$, si ha $\boxed{q}=10-1=\boxed{9}$. Pertanto l'equazione della retta s è $\boxed{y=-x+9}$.

1.8 **Esercizio**: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(1,-5)$, $B=(4,0)$.

Osserviamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, la cui equazione è del tipo $y=mx+q$.

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(1,-5)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo
$(B=(4,0))$

1 e al posto di y ci mettiamo -5, allora l'uguaglianza
(4) (0)

$y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere

$$-5 = m+q$$
$$(0 = 4m+q)$$

Siamo davanti a un sistema lineare del 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite (che sono m e q). Poiché $0=4m+q$, allora $\boxed{q=-4m}$.

Se nell'equazione $-5=m+q$ sostituiamo q con $-4m$, otteniamo $-5=m-4m$, cioè $-5=-3m$, da cui $3m=5$, e pertanto $\boxed{m=\frac{5}{3}}$. Inoltre, siccome $q=-4m$, si ha $\boxed{q}=(-4)\cdot\frac{5}{3}=\boxed{-\frac{20}{3}}$. Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=\frac{5}{3}x-\frac{20}{3}}.$$

Esercizio 1.29 Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(5,-5)$, $B=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y=mx+q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(5,-5)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 5 e al posto di y ci mettiamo -5, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deve essere verificata, cioè si deve avere $-5=5m+q$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo $-\frac{1}{2}$ e al posto di y ci mettiamo $\frac{1}{2}$, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deve essere verificata, ossia si deve avere $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}m+q$. Si ottiene quindi il seguente sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite, le cui incognite sono m e q:

$$\begin{cases} 5m+q=-5 \\ -\frac{1}{2}m+q=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dalla 1ª delle 2 equazioni, si ricava $\boxed{q=-5-5m}$. Sostituendo, nella 2ª equazione, q con questa espressione, si ha: $-\frac{1}{2}m-5+5m=\frac{1}{2}$, cioè $-5m-\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}+5$, vale a dire $\left(-5-\frac{1}{2}\right)m=\frac{1}{2}+5$, cioè $\left(-\frac{10}{2}-\frac{1}{2}\right)m=\frac{1}{2}+\frac{10}{2}$, ossia $\boxed{-\frac{11}{2}m=\frac{11}{2}}$. Moltiplicando per $-\frac{2}{11}$ si ha $\left(-\frac{2}{11}\right)\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)m=\left(-\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{11}{2}$, cioè $\boxed{m=-1}$. Poiché $q=-5-5m$, allora $\boxed{q}=-5-5\cdot(-1)=-5+5=\boxed{0}$, $\boxed{q=0}$. L'equazione della retta s è

$$\boxed{y=-x}.$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.30 $A=(5,2)$, $B=(-3,1)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y=mx+q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(5,2)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo **5** e al posto di y ci mettiamo **2**, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $2=5m+q$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(-3,1)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -3 e al posto di y ci mettiamo 1, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $1=-3m+q$

$\begin{cases} 5m+q=2 \\ -3m+q=1 \end{cases}$ (sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e a 2 incognite: le incognite sono m e q). Dalla 1ª delle 2 equazioni si ha $\boxed{q=2-5m}$. Sostituendo questa espressione nella 2ª equazione, è $-3m+2-5m=1$, cioè $-3m-5m=1-2$, ossia $-8m=-1$, vale a dire $8m=1$, quindi $\boxed{m=\frac{1}{8}}$. Tornando all'espressione $q=2-5m$ e sostituendo m con $\frac{1}{8}$, otteniamo $\boxed{q}=2-\frac{5}{8}=\frac{16}{8}-\frac{5}{8}=\frac{16-5}{8}=\boxed{\frac{11}{8}}$.

Dunque, $\boxed{m=\frac{1}{8}}$, $\boxed{q=\frac{11}{8}}$, e pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=\frac{1}{8}x+\frac{11}{8}}.$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.31 $A=(5,-4)$, $B=(-1,-1)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y=mx+q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(5,-4)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 5 e al posto di y ci mettiamo -4, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $-4=5m+q$

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(-1,-1)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo -1, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $-1=-m+q$

$\begin{cases} 5m+q=-4 \\ -m+q=-1 \end{cases}$ Otteniamo dunque un sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite. Dalla 2ª equazione si ha $q=-1+m$; sostituendo q con $-1+m$ nella 1ª equazione, si ha $5m-1+m=-4$, da cui $5m+m=-4+1$, cioè $6m=-3$, da cui $\boxed{m}=-\frac{3}{6}=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

Tornando all'espressione $q=-1+m$, si ottiene $\boxed{q}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=$
$=\frac{-2-1}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$ (N.B.: $\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$; $\frac{-2}{2}=-\frac{2}{2}$; $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$). Quindi

$\boxed{m=-\frac{1}{2}}$, $\boxed{q=-\frac{3}{2}}$, e l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}.$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.32 $A=(-1,3)$, $B=(2,0)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y=mx+q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B. Imporre il passaggio per il punto $A=(-1,3)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 3, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deo'essere verificata, cioè si deve avere $\boxed{3=-m+q}$

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(2,0)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 2 e al posto di y ci mettiamo 0, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deo'essere verificata, ossia si deve avere $\boxed{0=2m+q}$

$\begin{cases} -m+q=3 \\ 2m+q=0 \end{cases}$ Si tratta di un sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite. Dalla 2ª equazione otteniamo $\boxed{q=-2m}$; sostituendo q con $-2m$ nella 1ª equazione, si ha $-m-2m=3$, cioè $-3m=3$, $3m=-3$, $m=-\frac{3}{3}=-1$.

Dalla relazione $q=-2m$ si ottiene $q=(-2)\cdot(-1)=2$. Quindi $\boxed{m=-1}$, $\boxed{q=2}$, e pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=-x+2}.$$

1.33 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (3, 4)$ e parallela alla retta r di equazione $y = -4x - 7$

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.
Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non</u> <u>verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).
Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è -4. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (3, 4)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = -4$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, ottenendo

$$y - 4 = -4 \cdot (x - 3), \text{ cioè}$$

$$y - 4 = -4x + 12, \text{ ossia } y = -4x + 12 + 4, \text{ cioè}$$

$$\boxed{y = -4x + 16},$$

che è l'equazione della retta s.

1.34 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (1,5)$ e parallela alla retta r la cui equazione è $y = \frac{1}{3}x + 19$.

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.
Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non</u> <u>verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).
Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è $\frac{1}{3}$. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (1,5)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = \frac{1}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, ottenendo

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, \text{ da cui}$$

$$\boxed{y} = \frac{1}{3}x + 5 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{15}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}}$$

Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}}.$$

1.35 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = \left(-\frac{3}{2}, 7\right)$ e parallela alla retta r di equazione $y = -2x + 1$.

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è -2. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = \left(-\frac{3}{2}, 7\right)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = -2$, $x_0 = -\frac{3}{2}$, $y_0 = 7$, ottenendo

$y - 7 = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, cioè $y - 7 = -2x - 3$, ossia $y = -2x - 3 + 7$, cioè $y = -2x + 4$

Pertanto l'equazione della retta s è: $\boxed{y = -2x + 4}$.

1.36 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (5, 16)$ e parallela alla retta r di equazione $y = 3x + 10$

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non</u> <u>verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è 3. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (5, 16)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = 3$, $x_0 = 5$, $y_0 = 16$, ottenendo

$$y - 16 = 3 \cdot (x - 5), \text{ cioè}$$

$$y - 16 = 3x - 15, \text{ da cui}$$

$$y = 3x - 15 + 16, \text{ ossia } \boxed{y = 3x + 1},$$

che è l'equazione della retta s.

1.37 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (2, 1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -\frac{7}{4}x + \frac{8}{11}$

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non</u> <u>verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è $\frac{4}{7}$. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (2, 1)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = \frac{4}{7}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, ottenendo

$$y - 1 = \frac{4}{7}(x - 2) = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7}$$ Pertanto si ha:

$$y = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} + 1 = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} + \frac{7}{7} = \frac{4}{7}x - \frac{1}{7}.$$

Quindi $$\boxed{y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{7}}$$

è l'equazione della retta s.

1.38 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (7, 2)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = x - \frac{1}{3}$.

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

(*) $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*). Si noti che la retta r ha coefficiente angolare 1. Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è -1. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (7, 2)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = -1$, $x_0 = 7$, $y_0 = 2$, ottenendo

$$y - 2 = -1 \cdot (x - 7) = \boxed{-x + 7}, \text{ da cui } y = -x + 7 + 2, \text{ cioè}$$

$$\boxed{y = -x + 9},$$

che è l'equazione della retta s.

1.39 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (-1, 5)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è 2. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (-1, 5)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = 2$, $x_0 = -1$, $y_0 = 5$, ottenendo

$y - 5 = 2 \cdot (x + 1) = 2x + 2$, da cui

$y = 2x + 2 + 5$, ossia $\boxed{y = 2x + 7}$,

che è l'equazione della retta s.

1.40 <u>Esercizio</u>: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0=(1,5)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y=-3x+6$.

<u>Svolgimento</u>. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0,y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0,y_0) tranne quella <u>verticale</u>) è

(*) $$y-y_0=m\cdot(x-x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r, che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi <u>non verticale</u>. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è $\frac{1}{3}$. Poiché s deve passare per il punto $P_0=(1,5)$, allora nella formula (*) prenderemo $m=\frac{1}{3}$, $x_0=1$, $y_0=5$, ottenendo

$y-5=\frac{1}{3}(x-1)$, cioè $y-5=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$, da cui

$$y=\frac{1}{3}x+5-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x+\frac{15}{3}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}}.$$

Quindi l'equazione della retta s è

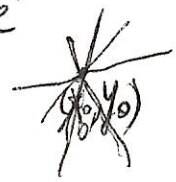
$$\boxed{y=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}}.$$

ESERCIZI

1.41) Scrivere l'equazione della retta s che passa per il punto $P_0=(1,3)$ ed è parallela alla retta di equazione $y=2x-3$.

<u>Risoluzione</u>: L'equazione del fascio di rette passante per un punto (x_0,y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0,y_0) tranne <u>quella verticale</u>) è

(*) $$\boxed{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$$



dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta $y=2x-3$, che è una retta <u>obliqua</u>, in particolare <u>non</u> <u>verticale</u> quindi veramente possiamo applicare la formula (*) (si deve sempre verificare di non essere nella situazione "cattiva" della retta verticale).

Siccome due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, allora il coefficiente angolare della retta s è 2. Tenendo conto che s deve passare per il punto $P_0=(1,3)$, allora nella formula (*) prenderemo $m=2$, $x_0=1$, $y_0=3$, ottenendo

$$y-3=2\cdot(x-1) \quad \text{cioè}$$

$$y-3=2x-2 \quad \text{ossia} \quad y=2x-2+3 \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{y=2x+1}$$

che sarà l'equazione della retta s.

1,42) <u>Esercizio</u>: Determinare l'equazione della retta s passante per il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y=0$.

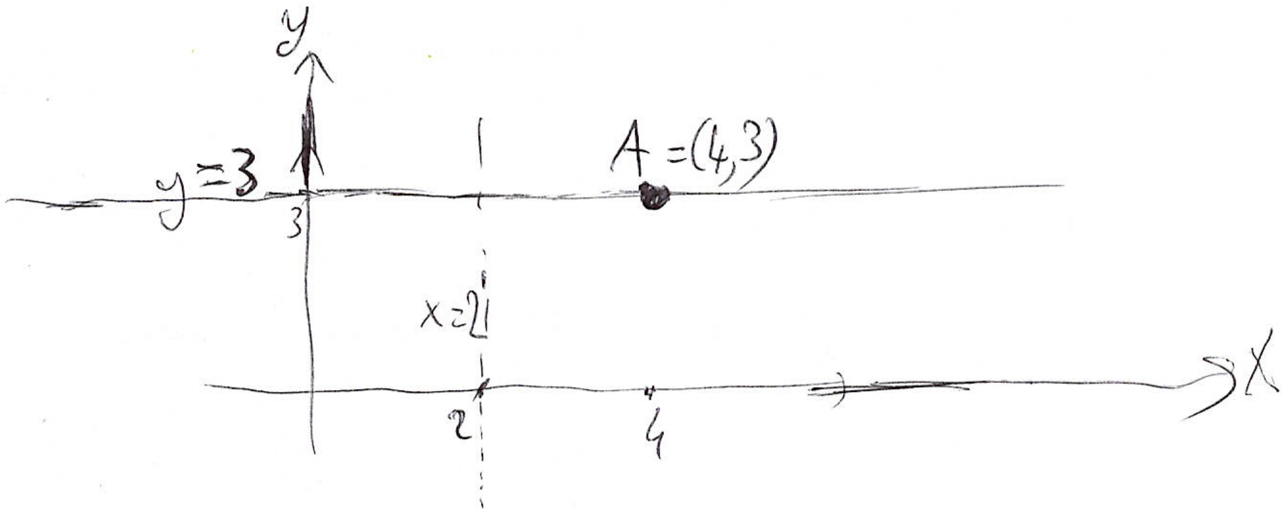
Notiamo che la retta $y=0$ è l'asse delle x, che è <u>orizzontale</u>. Quindi una retta s perpendicolare alla retta $y=0$ è necessariamente <u>verticale</u>. Pertanto l'equazione della retta s sarà del tipo $x=x_0$, ove x_0 è un opportuno numero reale. Ma chi è x_0? Siccome la retta passa per il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$, la cui ascissa è $\frac{1}{2}$, e siccome tutti i punti della retta hanno ascissa costante (per l'appunto, x_0), allora x_0 deve essere uguale a $\frac{1}{2}$, cioè <u>tutti</u> i punti della retta s hanno ascissa $\frac{1}{2}$. Cioè, l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}.$$

Scrivere l'equazione della retta s perpendicolare alla retta $x=2$ e passante per il punto $A=(4,3)$

La retta $x=2$ è verticale, e quindi una retta perpendicolare alla retta $x=2$ deve essere necessariamente orizzontale, cioè del tipo $y=k$, ove k è un opportuno numero reale. Siccome questa retta (s) deve passare per il punto $(4,3)$, allora k deve essere necessariamente uguale a 3, quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=3}.$$



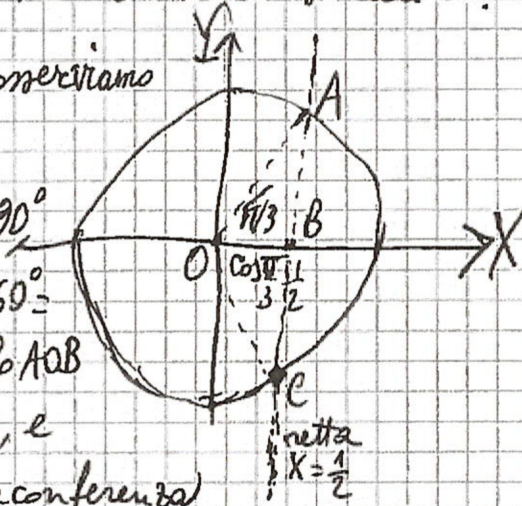
DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2. Risolvere le seguenti equazioni:

2.1 $\cos x = 6$ Il coseno assume valori compresi fra -1 ed 1, e quindi l'equazione non ammette soluzioni.

2.2 $\cos x = \frac{1}{2}$. Innanzi tutto osserviamo che $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; infatti, essendo l'angolo $A\hat{O}B$ $\frac{\pi}{3}$ e l'angolo $A\hat{B}O = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ allora l'angolo $O\hat{A}B$ misura $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Pertanto il triangolo rettangolo AOB è la metà di un triangolo equilatero, e quindi, essendo $\overline{OA} = 1$ (raggio della circonferenza goniometrica), si ha $\overline{OB} = \frac{1}{2}$. Ma $\overline{OB}$ è proprio $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ$, per definizione stessa della funzione coseno.



Consideriamo le nuove coordinate (polari) $X = \cos x$, $Y = \sin x$. La retta $X = \frac{1}{2}$ incontra la circonferenza goniometrica nei due punti A e C. Al punto A corrisponde l'angolo di $\frac{\pi}{3}$ (radianti), mentre al punto B, per simmetria, corrisponde l'angolo $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.
Nella circonferenza goniometrica dunque, le soluzioni sono $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5}{3}\pi$. Tenendo conto che il coseno è una funzione periodica di periodo 2π, otteniamo che la totalità delle soluzioni è: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$, ove $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$

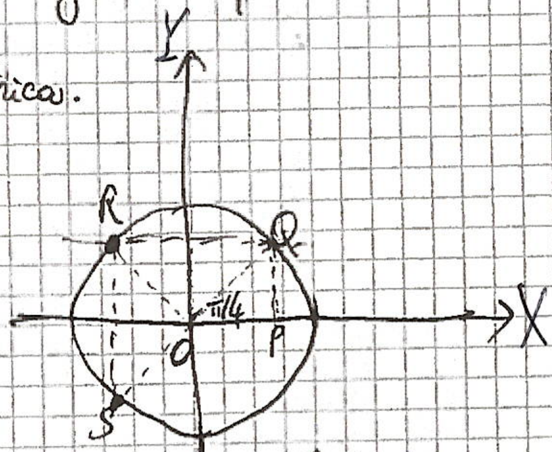
DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:

2.B $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Disegniamo la circonferenza goniometrica.



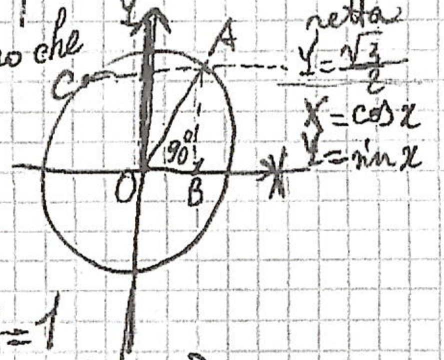
Osserviamo, innanzi tutto, che $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Infatti il coseno di $45°$ è espresso dalla lunghezza $\overline{OP}$. Notiamo anche che il triangolo OPQ in figura è rettangolo isoscele: infatti l'angolo $O\hat{P}Q$ misura $90°$, e quindi l'angolo $O\hat{Q}P$ misura $180° - (90° + 45°) = 45°$. Quindi $\overline{PQ} = \overline{OP}$. Per il teorema di Pitagora, si ha: $1 = \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OP}^2 = 2 \cdot \overline{OP}^2$. Quindi $\overline{OP}^2 = \frac{1}{2}$, e di conseguenza $\overline{OP} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pertanto abbiamo visto che $\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Adesso cerchiamo, sempre nella circonferenza goniometrica, i punti x tali che $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per simmetria, il punto R corrisponde all'angolo $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (stesso seno e coseni opposti) e il punto S corrisponde all'angolo $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ (seni e coseni opposti). Quindi, nella circonferenza goniometrica, le soluzioni sono $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Tenendo conto che la funzione coseno è periodica di periodo 2π, la soluzione globale è costituita dai punti $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ è l'insieme di tutti gli interi relativi.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:



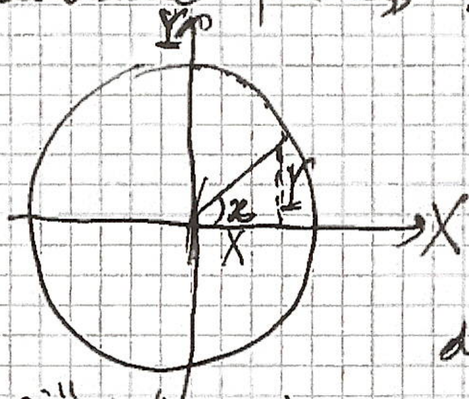
2.4 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Innanzi tutto, vediamo che $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A pagina 35, nell'esercizio 2, 2, abbiamo visto che il triangolo AOB è la metà di un triangolo equilatero, e che, visto che $\overline{OA}=1$ (raggio della circonferenza goniometrica in figura), si ha $\overline{OB}=\frac{1}{2}$. Notiamo che $\overline{BA} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin 60°$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OAB, si ha:
$1 = \overline{OA}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BA}^2 + \frac{1}{4}$, e quindi $\overline{BA}^2 = \frac{3}{4}$, da cui $\overline{BA} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Consideriamo le nuove coordinate (polari) $X=\cos x$, $Y=\sin x$.
La retta $Y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ incontra la circonferenza goniometrica nei due punti A (al quale corrisponde l'angolo $\frac{\pi}{3}$) e C (al quale, per simmetria, corrisponde l'angolo $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$).
Nella circonferenza goniometrica, dunque, le soluzioni sono $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. Tenendo conto che il seno è una funzione periodica di periodo 2π, otteniamo che la soluzione globale è data dai punti $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$, ove $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:

2.5 $\sin x = \cos x$ Consideriamo la circonferenza goniometrica (di centro l'origine e raggio 1) e passiamo alle coordinate "polari" $X = \cos x$, $Y = \sin x$

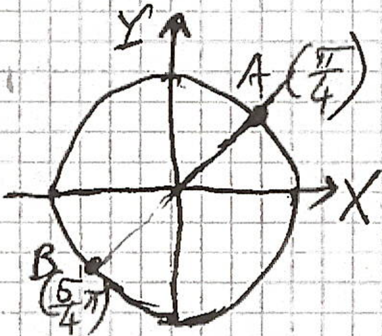


L'equazione della circonferenza goniometrica, in coordinate "polari", è $X^2+Y^2=1$ (circonferenza di centro l'origine $(0,0)$ e raggio 1). Il "trucco" è di passare alle coordinate "polari" e di aggiungere sempre l'equazione $X^2+Y^2=1$. Quindi, nelle nuove coordinate X ed Y, ci troviamo di fronte al seguente sistema:

$$\begin{cases} Y = X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

Si ottiene: $2X^2=1$ $\quad X^2=\frac{1}{2}$ $\quad X=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ Abbiamo 2 casi:

1° caso: $X=Y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. ~~Appg~~ Nell'esercizio 2.3, abbiamo visto che $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,



quindi il 1° caso corrisponde al valore $x=\frac{\pi}{4}$. Nel secondo caso si ottiene $X=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nel caso di seno e coseno contemporaneamente opposti, si considera il valore $\pi + x$ associato ad x. Nel nostro caso, si ottiene il valore $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$. Quindi, nella circonferenza goniometrica, ci sono due soluzioni: $x=\frac{\pi}{4}$ ed $x=\frac{5\pi}{4}$. In generale, l'insieme completo di tutte le soluzioni è $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5}{4}\pi+2k\pi\right\}$, ove $\mathbb{Z}=\{0,+1,-1,+2,-2,+3,-3,\dots\}$, visto che sin e cos sono periodiche di periodo 2π.

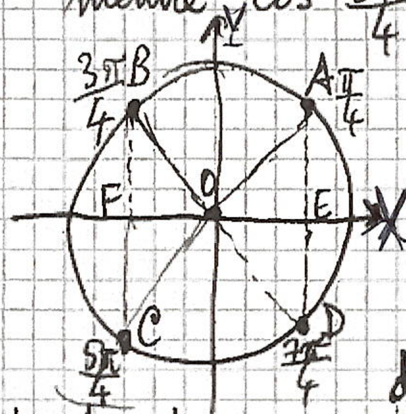
DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 12: Risolvere le seguenti equazioni:

12.6 $\operatorname{tg} x = -1$

Nell' esercizio 12.3 abbiamo visto che $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($=\cos 45°$), mentre $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($=\cos 135°$). Per l' identità



fondamentale della trigonometria ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), si ha: $\sin^2\frac{\pi}{4} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Essendo $\frac{\pi}{4}$ nel 1° Quadrante allora $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (è positivo).

Sempre per l' identità fondamentale della trigonometria, si ha: $\sin^2\frac{3\pi}{4} = 1 - \cos^2\frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Essendo $\frac{3}{4}\pi$ nel 2° Quadrante, allora $\sin\frac{3\pi}{4}$ è positivo, quindi $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Allora si ha
$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$
Per simmetria, si avrà anche $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = -1$ (seno e coseno opposti, e quindi stessa tangente: questo accade in generale ogni volta che ci sono due angoli che differiscono di π). Quindi, nella circonferenza goniometrica, le soluzioni dell' equazione data sono $x = \frac{3}{4}\pi$ ed $x = \frac{7}{4}\pi$.

Osserviamo che la disequazione data 12.6 può essere risolta anche in quest' altro modo. Invece di $\operatorname{tg} x = -1$ si può scrivere $\frac{\sin x}{\cos x} = -1$ (con questa scrittura, ovviamente, $\cos x$ deve essere diverso da 0), da cui $\sin x = -\cos x$. Passando a coordinate "polari" $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$ come nell' esercizio 12.5 e inserendo l' equazione della circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$ (trucco!), si ottiene $\begin{cases} Y = -X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$, cioè $X^2 + (-X)^2 = 1$, e quindi $2X^2 = 1$, $X^2 = \frac{1}{2}$ ed $Y^2 = \frac{1}{2}$, quindi - diciamo - $X = \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $Y = \sin x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ (scrivo prima $\pm$ e poi $\mp$ per indicare che i segni devono essere discordi, ottenendo i punti B e D in figura, che corrispondono rispettivamente ad $x = \frac{3}{4}\pi$ ed $x = \frac{7}{4}\pi$). Infatti ...

... Continua nella pagina seguente ...

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 2.6 (equazioni trigonometriche) (continuazione)

Infatti nel punto A il seno e il coseno sono positivi (rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati $\overline{EA}$ ed $\overline{OE}$), nel punto B il seno è positivo e il coseno è negativo (rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati $\overline{FB}$ ed $\overline{OF}$), nel punto C il seno e il coseno sono negativi (rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati $\overline{FC}$ ed $\overline{OF}$), e nel punto D il seno è negativo (lunghezza del segmento orientato $\overline{ED}$) e il coseno è positivo (lunghezza del segmento orientato $\overline{OE}$), e quindi il seno e il coseno sono discordi nei punti B e D.
Quindi anche attraverso quest' altro procedimento si ottiene che, nella circonferenza goniometrica, le soluzioni della disequazione sono $x = \frac{3}{4}\pi$ ed $x = \frac{7}{4}\pi$.
La soluzione globale (tenendo conto del fatto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π) è:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right\}, \text{ con } \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

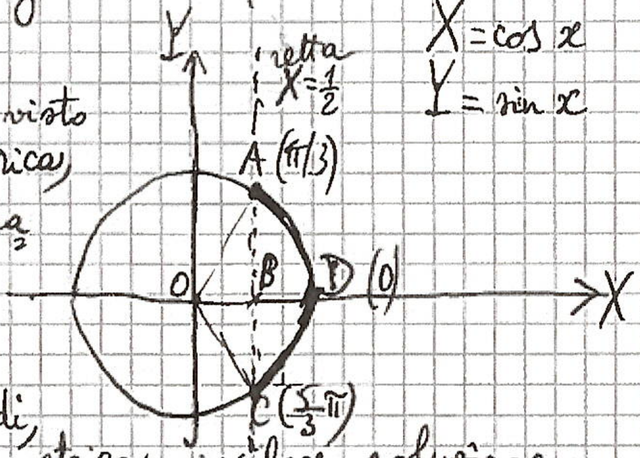
Si può scrivere anche: $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (in un modo più semplice).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio B: Risolvere le seguenti disequazioni:

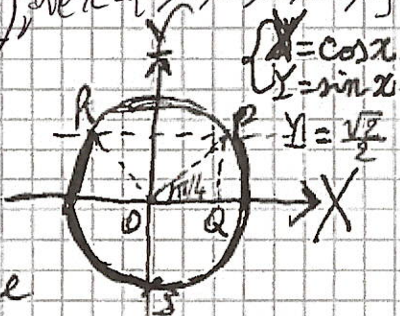
B.1 $\cos x \geq \frac{1}{2}$



Nell'esercizio 2.2, abbiamo visto che, nella circonferenza goniometrica, i valori x delle soluzioni dell'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$ sono $\frac{\pi}{3}$ (il punto corrispondente è A) e $\frac{5}{3}\pi$ (il punto corrispondente è C). Quindi, sempre nella circonferenza goniometrica, i valori soluzione della disequazione $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sono quelli a destra della retta $X = \frac{1}{2}$ in figura, cioè quelli dell'arco $\widehat{ADC}$, cioè i punti $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$. Tenendo conto che il coseno è una funzione periodica di periodo 2π, la soluzione globale della disequazione data è costituita dai punti

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right[\right), \text{ ove } \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$$

ESERCIZIO B.2 $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



Consideriamo la circonferenza goniometrica (di centro l'origine e raggio 1). Il triangolo OPQ in figura è rettangolo e isoscele, in quanto, essendo l'angolo $P\hat{O}Q$ di $\frac{\pi}{4}$ e l'angolo $P\hat{Q}O$ di $\frac{\pi}{2}$, l'angolo $O\hat{P}Q$ sarà di $\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Quindi $\overline{QP} = \overline{OQ}$. Ma, dalla definizione di seno, $\overline{QP} = \sin\frac{\pi}{4}$ (valore positivo), e dal teorema di Pitagora si ha: $1 = \overline{OP}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{OQ}^2 = 2 \cdot \overline{QP}^2$, da cui $\overline{QP}^2 = \frac{1}{2}$, e quindi $\overline{QP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per simmetria, visto che $\sin(\pi - x) = \sin x$, si ha anche: $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi, nella circonferenza goniometrica, l'insieme soluzione è: $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right[$ (cioè i punti dell'arco PSR in figura). Tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, la soluzione globale della disequazione è:

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right[\right), \text{ ove } \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

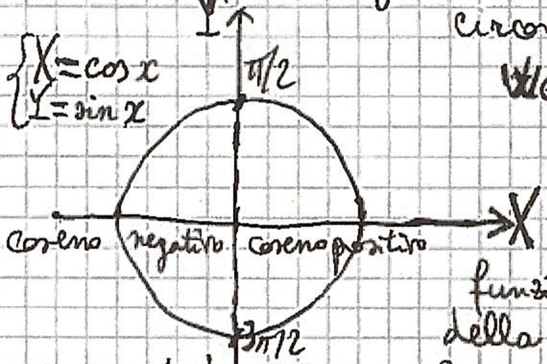
Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio B: Risolvere le seguenti disequazioni:

Esercizio B.3 $\cos x + 4 \le 0$ Si ha $\cos x \le -4$, e quindi questa disequazione non ammette soluzioni reali, in quanto la funzione coseno ammette valori compresi fra -1 ed 1.

Esercizio B.4 $\cos x + 4 \ge 0$ Si ha: $\cos x \ge -4$. Questa disequazione è sempre verificata, in quanto il coseno è sempre ≥ -1, e a maggior ragione maggiore di -4.

Esercizio B.5 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \le 0$. Poniamo $w = x+\frac{\pi}{3}$. Nell'esercizio 11, f7, a pag. 47, avevamo visto che il coseno è positivo (o nullo) nei punti della zona "est" della circonferenza goniometrica, e quindi il coseno è negativo (o nullo) nei punti della zona "ovest" della circonferenza goniometrica. I punti della zona "ovest", nella circonferenza goniometrica, sono quei valori



$w \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Da $w = x+\frac{\pi}{3}$ si ha $x = w - \frac{\pi}{3}$, e quindi $x \in \left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

Tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, la soluzione globale della disequazione è data da:

$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{7}{6}\pi+2k\pi\right]$, ove $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\dots\}$.

Esercizio B.6 $\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right) \ge 0$. Poniamo $v = x+\frac{5\pi}{4}$. Con riferimento all'esercizio precedente, i punti della circonferenza goniometrica dove il coseno è positivo o nullo sono i punti $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$. Poiché $v = x + \frac{5\pi}{4}$, allora $x = v - \frac{5}{4}\pi$, e quindi si ottiene $x \in \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}-\frac{5}{4}\pi, 2\pi-\frac{5}{4}\pi\right[= \left[-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right[$. Ma l'intervallo $\left[-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right]$ non è contenuto in $[0, 2\pi[$. Poiché la funzione coseno è periodica di periodo 2π, è equivalente a $\left[-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right]$ considerare l'intervallo $\left[2\pi-\frac{5}{4}\pi, 2\pi-\frac{3}{4}\pi\right] = \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$. Quindi si ottiene: $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right[\cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ nella circonferenza goniometrica. La soluzione globale è $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5}{4}\pi+2k\pi\right]$, ove $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\dots\}$.

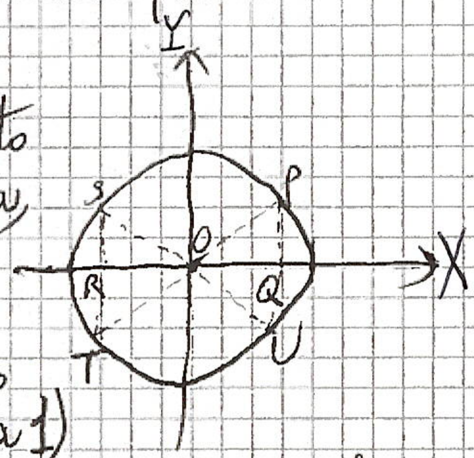
DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio B: Risolvere le seguenti disequazioni:

Esercizio B.7: $\sin x \cos x \geq 0$

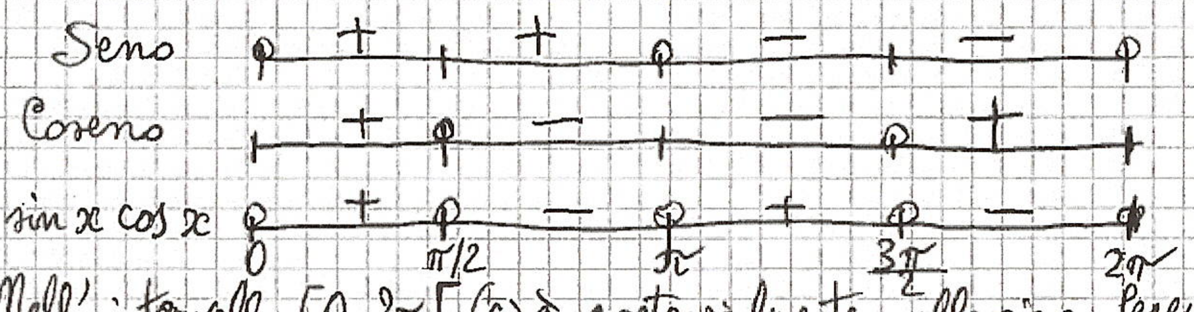
Negli esercizi precedenti abbiamo visto che, nella circonferenza goniometrica, il seno è positivo o nullo in $[0, \pi]$ (nella figura, le lunghezze dei segmenti orientati $\overline{QP}$ ed $\overline{RS}$, essendo il raggio della circonferenza uguale a 1)



ed è negativo o nullo in $[\pi, 2\pi]$ (nella figura, le lunghezze dei segmenti orientati $\overline{QU}$ ed $\overline{RT}$). Inoltre il coseno è positivo o nullo in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, mentre è negativo o nullo in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (rispettivamente, lunghezza del segmento orientato $\overline{OQ}$ e lunghezza del segmento orientato $\overline{OR}$).

Per ricordarsi	Zona Nord:	seno positivo
	Sud:	seno negativo
	Zona Est:	coseno positivo
	Ovest:	coseno negativo

Quindi, in $[0, 2\pi]$ si ha:



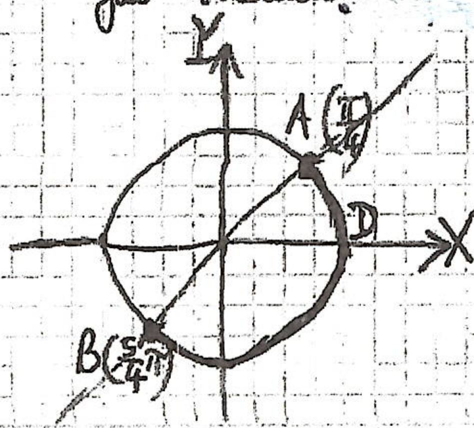
Nell'intervallo $[0, 2\pi[$ (cioè, sostanzialmente, nella circonferenza goniometrica), le soluzioni della disequazione data sono quei valori che rendono positivo o nullo il prodotto $\sin x \cos x$, cioè i numeri $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Quindi, tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, la soluzione globale è data da $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]\right)$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio B: Risolvere le seguenti disequazioni:

B.8 $\sin x \leq \cos x$ Consideriamo la circonferenza goniometrica, cioè la circonferenza di centro l'origine $(0,0)$ e di raggio 1. Consideriamo le coordinate "polari" $X=\cos x$, $Y=\sin x$, e l'equazione associata $\sin x=\cos x$, che abbiamo già studiato. Questa equazione - abbiamo visto - corrisponde al sistema $\begin{cases} Y=X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$



e ammette, nella circonferenza goniometrica, le due soluzioni $x=\frac{\pi}{4}$ (punto A) ed $x=\frac{5}{4}\pi$ (punto B). La disequazione data corrisponde al sistema $\begin{cases} Y\leq X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$, che ha per soluzione i punti della circonferenza goniometrica $(X^2+Y^2=1)$ che appartengono all'arco $\overset{\frown}{ADB}$, estremi A e B inclusi (Y dev'essere più piccolo di X, e quindi la bisettrice del 1° e del 3° Quadrante divide il piano in due zone, e si deve prendere quella che sta a "sud-est" della bisettrice). Quindi, nella circonferenza goniometrica, la soluzione della disequazione data è costituita dai punti x appartenenti all'insieme $[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{5}{4}\pi,2\pi[$.
L'insieme "soluzione globale" è allora

$x\in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left([2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi]\cup[\frac{5}{4}\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi[\right)$, ove $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$ è l'insieme dei numeri interi relativi, tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π.

Esercizio B 8 bis $\boxed{\sin x<\cos x}$ Analogamente alla disequazione precedente, il sistema corrispondente è $\begin{cases} Y<X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$ e questa volta i punti del tipo $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ e $\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$, non vanno presi. Si ottiene che la soluzione "globale" è

$$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left([2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi[\ \cup\ ]\frac{5}{4}\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi[\right).$$

ESERC $\boxed{4.1}$ Determinare il centro e il raggio della circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-6x-6y+17=0$$

(è veramente una circonferenza ?...)

Negli appunti viene seguita la seguente tecnica, che permette di pensare al centro e al raggio <u>senza</u> imparare formule a memoria. Il "trucchetto" è:

cerchiamo di ricondurci a espressioni che riguardano <u>centro</u>, <u>raggio</u>, <u>distanza</u>, cioè del tipo (x_0, y_0 sono le coordinate del centro ed R è il raggio)

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, ossia

$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2-R^2=0$,

$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$, che deve essere uguale a

$x^2+y^2-6x-6y+17=0$. Quindi i corrispondenti coefficienti devono essere uguali, cioè $-2x_0=-6$ $x_0=3$

$-2y_0=-6$ $y_0=3$ $x_0^2+y_0^2-R^2=17$ $3^2+3^2-R^2=17$

$18-R^2=17$ $R^2=1$ $R=1$

Pertanto le coordinate del centro sono $(3,3)$ e il raggio R è 1, quindi si tratta <u>veramente</u> di una circonferenza.

4.2) Determinare il centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-2y-5=0$.

È veramente una circonferenza, oppure no?

Pensiamo subito direttamente al centro e al raggio: l'equazione della circonferenza viene introdotta nella forma

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, ove x_0, y_0 sono le coordinate del centro ed R è il raggio, cioè

$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2-R^2=0$,

che dev'essere uguale a

$x^2+y^2-2x-2y-5=0$. I rispettivi coefficienti devono essere uguali, e quindi

$-2x_0=-2 \quad -2y_0=-2 \quad x_0^2+y_0^2-R^2=-5$

$x_0=1 \quad y_0=1 \quad 1+1-R^2=-5 \quad -R^2=-7 \; R^2=7$

$R=\sqrt{7}$: quindi il centro è il punto $(1,1)$, mentre il raggio R è $\sqrt{7}$. Si tratta VERAMENTE di una circonferenza.

ESERC (4,3)

4,3) Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ di raggio 1 e centro nel punto di intersezione delle rette $y=x$, $y=-x+6$.

Determiniamo il punto di intersezione (x_0,y_0) richiesto.

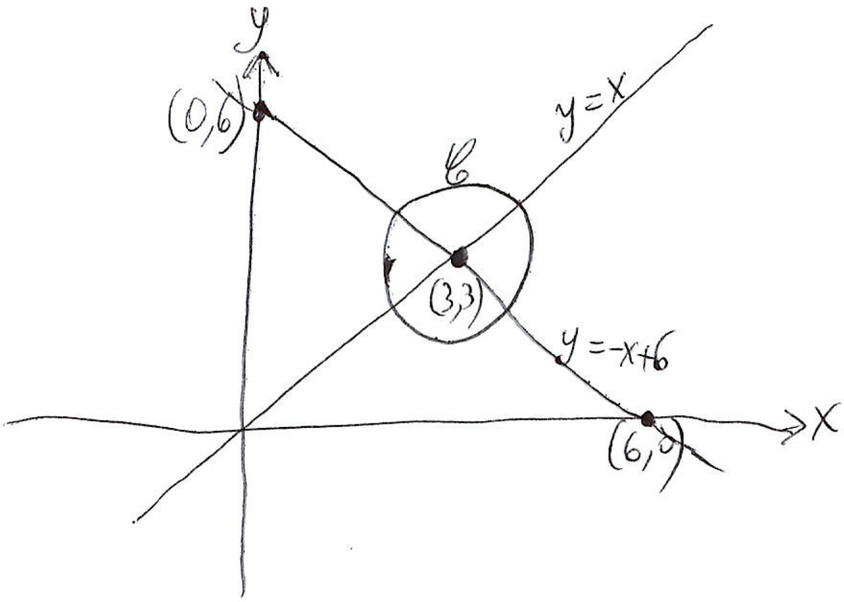
$\begin{cases} y=x \\ y=-x+6 \end{cases}$ Si deve avere $x_0=-x_0+6$ $\quad 2x_0=6 \quad x_0=3$ e quindi anche $y_0=3$

Quindi $(x_0,y_0)=(3,3)$.

L'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ di centro $(3,3)$ e raggio 1 è: $(x-3)^2+(y-3)^2=1$, cioè

$x^2-6x+9+y^2-6y+9=1$, ossia

$x^2+y^2-6x-6y+17=0$



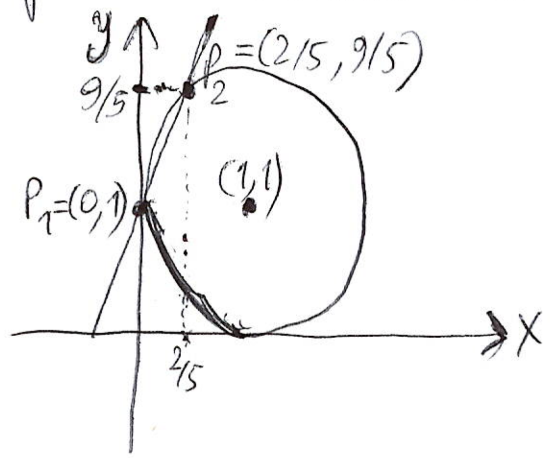
ESERC. 4.4)

4.4) Trovare i punti di intersezione fra la retta r di equazione $y = 2x + 1$ e la circonferenza $\mathscr{C}$ di equazione
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$$\begin{array}{l} \mathscr{C} \\ r \end{array} \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = 2x+1 \end{cases}$$
($\mathscr{C}$ è la circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1)

Sostituendo l' espressione $y = 2x+1$ nell'equazione di $\mathscr{C}$, si ottiene
$$(x-1)^2 + (2x + \cancel{1} - \cancel{1})^2 = 1$$
$$x^2 - 2x \cancel{+1} + 4x^2 = \cancel{1} \qquad 5x^2 - 2x = 0, \text{ cioè } x\cdot(5x-2) = 0,$$
da cui $\boxed{x = 0}$ oppure $5x - 2 = 0$, cioè $\boxed{x = \frac{2}{5}}$.

In corrispondenza ad $x = 0$ si ha $y = 2\cdot 0 + 1 = 1$;
in corrispondenza ad $x = \frac{2}{5}$ si ha $y = 2\cdot\frac{2}{5} + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$.
Quindi i due punti di intersezione sono $P_1 = (0,1)$ e $P_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$



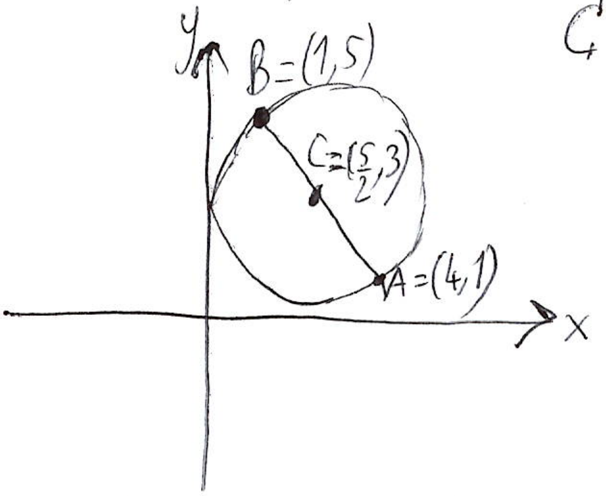
4.5) Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ che passa per $A=(4,1)$, $B=(1,5)$ e ha centro nel loro punto medio.

Le coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ del punto medio di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, cioè nel nostro caso $\left(\frac{4+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

L'equazione generica della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro (x_0, y_0) e raggio R è $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, quindi nel nostro caso $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=R^2$.

Ora troviamo R imponendo il passaggio per i punti $A=(4,1)$ e $B=(1,5)$. Per il passaggio per A, sostituiamo x con 4 ed y con 1, ottenendo $\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+(1-3)^2=R^2$
$\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2=R^2$ $\quad \frac{9}{4}+4=R^2$ $\quad R^2=\frac{9+16}{4}=\frac{25}{4}$, da cui $R=\frac{5}{2}$. Verifichiamo che $\mathcal{C}$ passa anche per il punto B.

L'equazione di $\mathcal{C}$ è $\boxed{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}}$ Sostituiamo x con 1 ed y con 5: si ottiene $\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+(5-3)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2=$
$=\frac{9}{4}+4=\frac{9+16}{4}=\frac{25}{4}$, come si voleva dimostrare.



C è il punto medio tra A e B

Per scrivere l' equazione di $\mathscr{C}$, si può anche applicare il seguente metodo geometrico: si calcola la distanza tra B e C (oppure tra A e C): questa distanza sarà il raggio R della nostra circonferenza. Si ha:

$$\text{dist}(B,C) = \sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{9+16}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$\text{dist}(A,C) = \sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} =$$

$= \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$. Quindi $R = \frac{5}{2}$, e l'equazione di $\mathscr{C}$ è

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4} \; (=R^2), \text{ cioè}$$

$$x^2 + \cancel{\frac{25}{4}} - 5x + y^2 + 9 - 6y = \cancel{\frac{25}{4}}$$

$x^2 - 5x + y^2 - 6y + 9 = 0$, ossia $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 = 0$.

ESERC. 4.6)

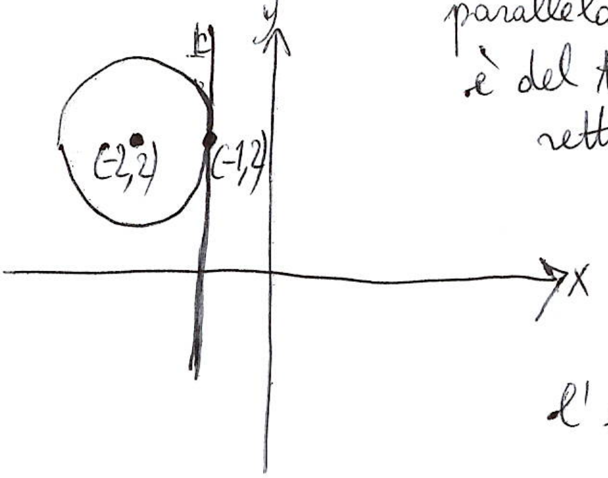
4.6.) Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(-2,2)$ e raggio 1 e l'equazione della retta r tangente a $\mathcal{C}$ nel punto di coordinate $(-1,2)$ e parallela all'asse y.

L'equazione della circonferenza di centro $(-2,2)$ e raggio 1 è: $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ cioè

$$x^2+4+4x+y^2+4-4y=1 \quad \text{ossia}$$

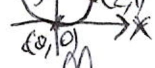
$$x^2+y^2+4x-4y+7=0$$

Per determinare l'equazione della retta r, aiutiamoci con un disegno. Dalla figura si vede che la retta r è parallela all'asse delle y, cioè è del tipo $x=x_0$. Siccome la retta r passa per il punto $(-1,2)$, x_0 dev'essere uguale a -1. Quindi l'equazione della retta r è



$$\boxed{x=-1}.$$

ESERCIZIO 4.7)

Scrivere l'equazione della parabola passante per il punto $P=(2,1)$ e vertice in $V=(0,0)$ (con direttrice parallela all'asse delle x).  Si vede a intuito che $a>0$, cioè la concavità è verso l'alto.

Osserviamo che, in base a quello che è stato detto nel testo adottato, si ha che L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA (CON DIRETTRICE PARALLELA ALL'ASSE DELLE x) AVENTE VERTICE IN $V=(0,0)$ È

$$(*) \qquad \boxed{y=\frac{1}{4p}x^2}$$

ove p è l'ordinata del fuoco (che ha coordinate $(0,p)$) e $y=-p$ è l'equazione della direttrice.

Imponiamo ora il passaggio per il punto $P=(2,1)$.

Se nella $(*)$ mettiamo 2 al posto di x e 1 al posto di y si deve ottenere un'identità. E così determiniamo p. Si ha:

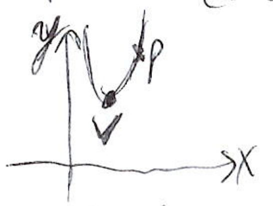
$$1=\frac{1}{4p}\cdot 2^2, \quad \frac{1}{p}=1, \quad \text{quindi } \boxed{p=1}$$

L'equazione della parabola è $\boxed{y=\frac{1}{4}x^2}$.

Le coordinate del fuoco sono $(0,1)$ e l'equazione della direttrice è $y=-1$.

Esercizio 4.8)

Scrivere l'equazione della parabola passante per il punto $P=(3,6)$ e avente vertice nel punto $V=(1,2)$ (e con la direttrice parallela all'asse delle x)



Visto che V è il vertice della parabola e che le coordinate del punto P sono tutte e due maggiori delle rispettive coordinate di V, allora da considerazioni geometriche si deduce che la nostra parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ rivolge la concavità verso l'alto.

Ora, per risolvere questo esercizio, conviene tenere conto del seguente "trucco". Un metodo "veloce" ed "elegante" è quello di ricordarsi la "genesi" dell'equazione della parabola quando si passa dal caso particolare in cui il vertice coincide con $(0,0)$ al caso generale (ove le coordinate del vertice sono indicate con (x_0, y_0)). Nel caso generale, l'equazione della parabola (v. testo adottato) è

$$y-y_0=\frac{1}{4p}\cdot(x-x_0)^2$$

Nel nostro caso $x_0=1$, $y_0=2$, quindi si ha

$$(*)\quad y-2=\frac{1}{4p}\cdot(x-1)^2$$

Ora determiniamo p, imponendo il passaggio per $P=(3,6)$. Se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6, la $(*)$ deve diventare un'identità. Si ha:

$6-2=\frac{1}{4p}\cdot(3-1)^2$, cioè $4=\frac{1}{\cancel{4}p}\cdot\cancel{4}$ $\quad \frac{1}{p}=4 \quad 4p=1 \quad \boxed{p=\frac{1}{4}}$

e quindi l'equazione della parabola è $\boxed{y-2=\frac{1}{4\frac{1}{4}}\cdot(x-1)^2}$ cioè $\boxed{y-2=(x-1)^2}$, ossia $y=(x-1)^2+2=x^2-2x+1+2=x^2-2x+3$. Quindi l'equazione è

$$\boxed{y=x^2-2x+3}$$

Esercizio 4.9

Facciamo una specie di "viceversa", o di "prova" dell'esercizio precedente, cioè:

Dimostrare che la parabola di equazione

$$(\overset{+}{+}) \quad y = x^2 - 2x + 3$$

passa per il punto $P=(3,6)$ e ha vertice in $V=(1,2)$

Innanzi tutto osserviamo che, se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6, otteniamo

$$6 = 3^2 - 2\cdot 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 3 + 3$$, che è vero.

Quindi la nostra parabola passa per $P=(3,6)$.

Adesso ricordiamo che le coordinate del vertice della parabola sono date da $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Nel nostro caso, $a=1$, $b=-2$, $c=3$, e quindi

$x_0 = \frac{2}{2} = 1$, $y_0 = \frac{4\cdot 3 - 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$, come si voleva provare.

[Come una curiosità: si può dimostrare che il vertice $V=(1,2)$ è veramente un elemento della nostra parabola. Infatti, se nella $(\overset{+}{+})$ al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 2, otteniamo $2 = 1^2 - 2\cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = -1 + 3$, che è vero.]

ESERC. 4.10) Determinare il fuoco, il vertice e la direttrice della parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$

Si ha: $a = -2$ $b = 1$ $c = 1$. Poniamo Δ (= discriminante) $= b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$. Si ha:

vertice $= V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2\cdot(-2)}, \frac{-9}{4\cdot(-2)}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$;

fuoco $= F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2\cdot(-2)}, \frac{-8}{4\cdot(-2)}\right) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$;

direttrice: $y = -\frac{(1+\Delta)}{4a} = -\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}_{2}\cdot(-2)} = \frac{5}{4}$ $\left(y = \frac{5}{4}\right)$

ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA

~~ESERC~~ 4.11) Scrivere l'equazione della parabola passante per $A_1=(-1,3)$, $A_2=(0,2)$ ed $A_3=(1,3)$ (tenendo conto che la sua direttrice è parallela all'asse x).

Si tratta di un'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$

Determiniamo i valori di a, b, c imponendo il passaggio per i punti A_1, A_2, A_3. Si deve avere:

$A_1)$: $3=a-b+c$ (perché $3=a\cdot\underbrace{(-1)^2}_{1}+(-1)b+c$)

$A_2)$: $2=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$ $\boxed{c=2}$

$A_3)$: $3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c$

Da $A_1)$ e $A_3)$ si ottiene $\cancel{a}-b\cancel{+c}=\cancel{a}+b\cancel{+c}$ cioè $-b=b$ $0=2b=b+b$

$\boxed{b=0}$ Determiniamo ora a, sostituendo i valori ottenuti di b e c nell'equazione $A_1)$ (o equivalentemente nell'equazione $A_3)$).

Si ha: $3=a-\cancel{0}+2$, quindi $a=3-2=1$.

L'equazione della parabola è quindi $\boxed{y=x^2+2}$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5: equazioni e disequazioni

Esercizio 5.1: $8(5-x)+3(x-5)>0$

Si ha: $40-8x+3x-15>0$, quindi $-5x>-25$, cioè $x<5$. In termini insiemistici, la soluzione è: $x\in\,]-\infty, 5[$

Esercizio 5.2: $(3x+1)^2-4x(x-2)\leq 5x(x+6)-16x$

$$9x^2+1+6x-4x^2+8x\leq 5x^2+30x-16x$$

$\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}+1+\cancel{14x}\leq\cancel{14x}$, da cui $1\leq 0$. Questo è impossibile, e quindi la disequazione non ammette soluzioni.

Esercizio 5.3 $x^2(x-1)\geqslant 0$

Notiamo, innanzi tutto, che $x=0$ è soluzione della disequazione data. Consideriamo ora il caso $x\neq 0$. In questo caso si ha $x^2>0$, e quindi la disequazione è equivalente a $\frac{x^2(x-1)}{x^2}\geqslant 0$, cioè $x-1\geqslant 0$, ossia $x\geqslant 1$

Quindi, dal punto di vista insiemistico, la soluzione è: $x\in[1,+\infty[\,\cup\{0\}$ (e non $x\in\,]1,+\infty[\,\cup\{0\}$).

Esercizio 5.4 $x^2-x-6=0$

Si tratta di un'equazione di secondo grado. Si ha:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\begin{cases}3\\-2\end{cases}$$

Pertanto la soluzione dell'equazione data è $\{3,-2\}$ (e non $\{3,2\}$).

Esercizi sulle equazioni e disequazioni (eserciziario di ispirazione)

DISEQUAZIONI FRATTE.

5.5) $\dfrac{x^2-5x+8}{9-x^2}<0$

Numeratore: Studiamo l'equazione $x^2-5x+8=0$.
Il discriminante è $\Delta=5^2-4\cdot 8=25-32=-7<0$
Quindi il trinomio x^2-5x+8 è sempre positivo, e allora la disequazione è verificata se e solo se $9-x^2<0$, cioè $x^2-9>0$. Le radici dell'equazione associata $x^2-9=0$, cioè $x^2=9$, sono 3 e -3, e si prendono i valori <u>esterni</u>. Pertanto la soluzione della disequazione è $x>3$ oppure (unione insiemistica) $x<-3$, cioè $x\in\,]-\infty,-3[\,\cup\,]3,+\infty[$.

5.6) $\dfrac{2x-1}{x-3}<\dfrac{x+1}{x-1}$. Innanzi tutto, deve essere $x\neq 3$ ed $x\neq 1$.
La disequazione è soddisfatta $\overset{\text{(se e solo se)}}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{2x-1}{x-3}-\dfrac{x+1}{x-1}<0$

$$\Longleftrightarrow \frac{(2x-1)(x-1)-(x+1)(x-3)}{(x-3)\cdot(x-1)}<0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2x^2\cancel{-x}\cancel{-2x}+1-x^2-x\cancel{+3x}+3}{(x-3)\cdot(x-1)}<0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-x+4}{(x-3)\cdot(x-1)}<0.$$

Osserviamo che, nel trinomio x^2-x+4, $\Delta=1-16=-15<0$, e quindi il numeratore è sempre positivo. Quindi x è soluzione se e solo se la frazione, calcolata nel punto x, assume valori negativi, se e solo se $(x-3)\cdot(x-1)<0$, quindi per valori <u>INTERNI</u> alle due radici 1 e 3.
Pertanto la soluzione della disequazione è $1<x<3$, cioè $x\in\,]1,3[$ (I punti 1 e 3 sono esclusi)

ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 5.7: Risolvere la seguente disequazione fratta:

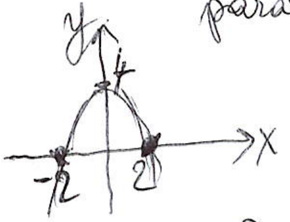
$$\frac{x^2-4x+3}{4-x^2} \leq 0$$

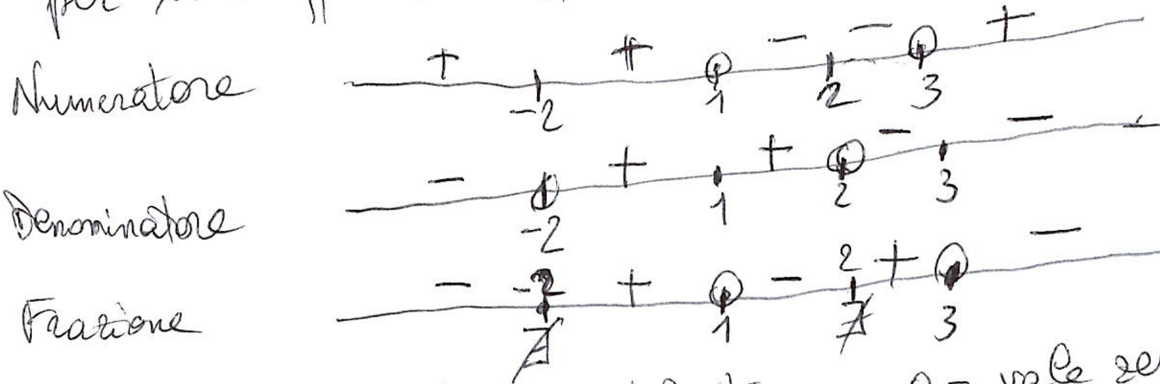
Studiamo dapprima il numeratore. Risolvendo l'equazione $x^2-4x+3=0$, si ha:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Quindi il numeratore si annulla nei punti 1 e 3, è positivo per valori esterni (ossia $x>3$ oppure $x<1$) ed è negativo per valori interni (cioè $1<x<3$).

Il denominatore è $4-x^2$. Risolvendo l'equazione $4-x^2=0$, si ha $x^2=4$, quindi le radici sono $x_1=-2$, $x_2=2$. Siccome nella parabola $y=4-x^2$, cioè $y=-x^2+4$, si ha che $a=-1<0$, allora per quanto visto nel "Testo adottato", la quantità $4-x^2$ è positiva per valori interni (quindi per $-2<x<2$) e negativa per valori esterni (cioè per $x>2$ oppure $x<-2$), e si annulla nei punti 2 e -2. Si ha quindi:





$\nexists$ vuol dire: non esiste, non è definita $\qquad$ 0 = vale zero

Quindi la soluzione della disequazione (cioè l'insieme dei punti dove la frazione è ≤ 0) è data da $x \in]-\infty,-2[\cup [1,2[\cup [3,+\infty[$, vale a dire $x<-2$ oppure $1 \leq x < 2$ oppure $x \geq 3$ (i punti in cui la frazione vale 0 devono essere compresi, mentre i punti in cui la frazione non è definita devono essere esclusi).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio sulle disequazioni

Disequazioni fratte

Esercizio 58: $\dfrac{4x - x^2}{9x^2 + 6x + 1} \geq 0$

Studiamo il numeratore e il denominatore.
Per il numeratore: studiamo $4x - x^2 = x(4-x)$
Questa quantità è positiva per valori INTERNI alle due radici 0 e 4 (cioè per $0 < x < 4$), è negativa per valori esterni ($x > 4$ oppure $x < 0$) e si annulla per $x = 4$ oppure per $x = 0$.

Esaminiamo il denominatore:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = -\frac{1}{3} \text{ (radice doppia)}$$

Quindi il denominatore si annulla per $x = -\frac{1}{3}$ e negli altri punti è strettamente positivo. Si ha:

		$-1/3$		0		4	
Numeratore	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
Denominatore	$+$	0	$+$		$+$		$+$
Frazione	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$

La soluzione della nostra disequazione è l'insieme costituito da quegli x per i quali la frazione è ≥ 0, cioè l'intervallo $[0, 4]$ (estremi compresi).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 5.9 $\dfrac{3}{x-2} < \dfrac{2x}{3+x}$

Innanzi tutto notiamo che, affinché quello che c'è scritto abbia senso, dev'essere $x \neq 2$ ed $x \neq -3$ (perché non si può dividere per 0).

Notiamo che $x-2$ e $3+x$ non è detto che siano sempre positive, e quindi - in generale - <u>non</u> si può fare il "prodotto a croce". Procediamo allora nel seguente modo:

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{3+x} < 0 \Longleftrightarrow$$ (vuol dire "se e solo se")

$$\frac{3(3+x)-2x(x-2)}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0 \Longleftrightarrow \frac{9+3x-2x^2+4x}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-2x^2+7x+9}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0 \Longleftrightarrow$$ (moltiplicando per -1 e cambiando il verso)

$$\Longleftrightarrow \frac{2x^2-7x-9}{(x-2)\cdot(3+x)} > 0.$$ Studiamo ora <u>separatamente</u> il numeratore (N) e il denominatore (D).

N: risolviamo l'equazione di 2° grado $2x^2-7x-9=0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{7 \pm 11}{4} \begin{cases} \nearrow 9/2 \\ \searrow -1 \end{cases}$$

N è positivo per valori esterni a $\left[-1, \frac{9}{2}\right]$ e negativo per valori interni. D: le radici sono 2 e -3, quindi D è positivo per valori esterni a $[-3, 2]$ e negativo per valori interni.

		-3		-1		2		$\frac{9}{2}$	
N	+		+	0	−		−	0	+
D	+	0	−		−	0	+		+
Frazione	+	∄	−	0	+	∄	−	0	+

La soluzione della disequazione è costituita da tutti e soli i punti dove la frazione è positiva, cioè per

$x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-1, 2\right[\cup \left]\frac{9}{2}, +\infty\right[$.

Si può fare anche, iniziando come a pag. 31: $\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{3+x} < 0 \iff$

$\frac{-2x^2+7x+9}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0$ Le radici dell'equazione $-2x^2+7x+9=0$ sono $\frac{9}{2}$ e -1 e quindi, essendo $a=-2<0$, il numeratore è positivo per valori interni a $\left]-1, \frac{9}{2}\right[$, negativo per valori esterni e si annulla in -1 ed in $\frac{9}{2}$. Si ha:

		-3		-1		2		$\frac{9}{2}$	
Numeratore	−		−	0	+		+	0	−
Denominatore	+	0	−		−	0	+		+
Frazione	−	∄	+	0	−	∄	+		−

La soluzione della disequazione è costituita da quei valori x per i quali la frazione è negativa, cioè per $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-1, 2\right[\cup \left]\frac{9}{2}, +\infty\right[$ (si ritrova lo stesso risultato)

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5. equazioni e disequazioni

Disequazioni fratte

Esercizio 6.10. $$\frac{7x-4}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}<\frac{7}{x+2}$$

Si ha (tenendo conto che $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$):

$$\frac{7x-4}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x-2}-\frac{7}{x+2}<0$$

$$\frac{7x-4-2(x+2)-7(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}<0$$

$$\frac{\cancel{7x}-4-2x-4-\cancel{7x}+14}{(x+2)\cdot(x-2)}<0 \qquad \frac{\overset{-2(x-3)}{\overset{\|}{-2x+6}}}{(x+2)\cdot(x-2)}<0$$

se e solo se $$\frac{x-3}{(x+2)\cdot(x-2)}>0$$ Il numeratore è positivo se e solo se $x>3$.

Il denominatore è positivo per valori ESTERNI all'intervallo $[-2,2]$. Quindi si ha:

		-2		2		3	
Numeratore	$-$		$-$		$-$	0	$+$
Denominatore	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
FRAZIONE	$-$		$+$		$-$	0	$+$

La soluzione della disequazione è costituita da quei valori x per i quali la frazione è positiva, cioè per
$x\in\,]-2,2[\,\cup\,]3,+\infty[$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5: equazioni e disequazioni

Sistemi di disequazioni

Sistema 5.11 $\begin{cases} x+2>5 \\ x-5>0 \end{cases}$

La soluzione del sistema è data da tutti i punti x che soddisfano <u>contemporaneamente</u> la prima e la seconda disequazione, cioè dall' intersezione dell' insieme soluzione della prima disequazione con l' insieme soluzione della seconda disequazione.

Soluzione della prima disequazione: $x > 5-2 = 3$, cioè $x \in]3, +\infty[$. Soluzione della seconda disequazione: $x > 5$.

Soluzione del sistema: $x \in]3,+\infty[\cap]5,+\infty[=]5,+\infty[$, cioè $x > 5$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5: equazioni e disequazioni
Sistemi di disequazioni

Sistema 5.12.
$$\begin{cases}(x+2)(x-1) > 4-(3x-1)^2 \\ (x-1)^2+(2x+3)^2 > 25\end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione:

$$x^2+2x-x-2 > 4-9x^2-1+6x$$

$10x^2-5x-5>0 \quad 2x^2-x-1>0$ per valori esterni all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione

$$2x^2-x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

La soluzione della prima disequazione è: $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Risolviamo la seconda disequazione:

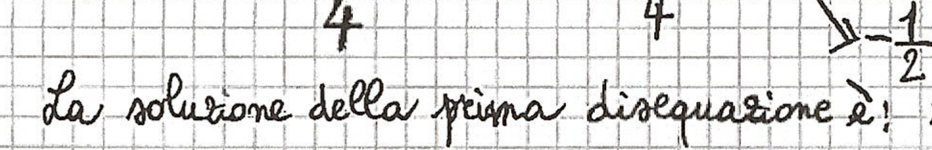
$$x^2-2x+1+4x^2+12x+9>25$$

$5x^2+10x-15>0 \quad x^2+2x-3>0$ per valori esterni all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione

$$x^2+2x-3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

La soluzione della seconda disequazione è: $x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]1,+\infty\right[$



Soluzione 1ª diseq.
Soluzione 2ª diseq.

La soluzione del sistema è l'insieme intersezione degli insiemi-soluzione delle due disequazioni, quindi $\left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty,-3\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,-3\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ (vedi anche figura).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 1: equazioni e disequazioni
Sistemi di disequazioni

Sistema 513
$$\begin{cases} \dfrac{3x+7}{x+1} - \dfrac{3x-7}{x-1} < 0 \\ \\ 3(x-1)^2 \leq 25 - x \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione:

$$\frac{(3x+7)\cdot(x-1)-(3x-7)(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{\cancel{3x^2}+7x-3x-\cancel{7}-\cancel{3x^2}+7x-3x+\cancel{7}}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0 \text{ se e solo se}$$

(*) $\dfrac{8x}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0$ Il numeratore è positivo se e solo se $x > 0$. Il denominatore è positivo se e solo se x è ESTERNO all'intervallo $[-1,1]$. Studiamo quindi la disequazione in (*)

		-1		0		1	
Numeratore	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Denominatore	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
FRAZIONE	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

La soluzione della prima disequazione è costituita da tutti (e soli) quegli x per i quali è negativa la frazione in (*), cioè $x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,1\right[$.

(Sistema 5.13: continuazione)

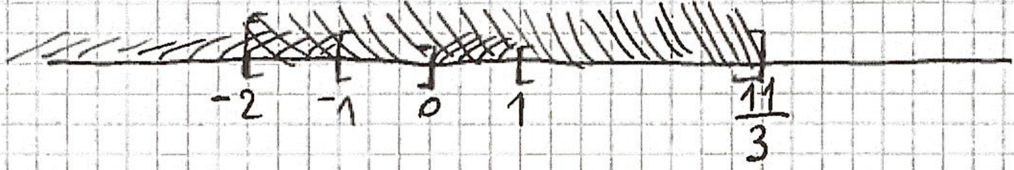
Risolviamo la seconda disequazione:

$3(x-1)^2 \leq 25 - x$ se e solo se $3\cdot(x^2-2x+1) \leq 25-x$ se e solo se $3x^2-6x+3 \leq 25-x$ se e solo se $3x^2-5x-22 \leq 0$, questo è vero per valori <u>interni</u> all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione $3x^2-5x-22=0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+264}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{5 \pm 17}{6} = \begin{cases} 11/3 \\ -2 \end{cases}$$

Quindi la soluzione della seconda disequazione è: $x \in \left[-2, \frac{11}{3}\right]$ (estremi compresi, perché c'è il simbolo $\leq$, minore <u>o uguale</u>).

La soluzione del sistema 5.13, quindi, è costituita dall'insieme <u>intersezione</u> della soluzione della prima disequazione con la soluzione della seconda disequazione, cioè per $x \in (]-\infty,-1[\cup]0,1[) \cap \left[-2, \frac{11}{3}\right] = [-2,-1[\cup]0,1[$ (vedi anche figura).



DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 4 : equazioni e disequazioni

Sistemi di disequazioni

Sistema 4.14 $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \\[2ex] \dfrac{3}{1-x} > 0 \end{cases}$

Risolviamo la prima disequazione

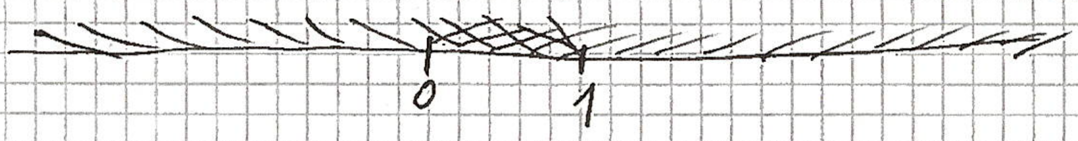
$\dfrac{x^2+1}{x} > 0$ Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha: $\dfrac{x^2+1}{x} > 0$ se e solo se $x > 0$, cioè $x \in \,]0, +\infty[$.

Considerando la seconda disequazione $\dfrac{3}{1-x} > 0$, si ha che la frazione è positiva se e solo se $1-x > 0$ se e solo se $x < 1$, cioè $x \in \,]-\infty, 1[$.

La soluzione del sistema è l'insieme <u>intersezione</u> fra la soluzione della prima disequazione e la soluzione della seconda disequazione, cioè

$x \in \,]0, +\infty[\,\cap\,]-\infty, 1[\,=\,]0, 1[$

(vedi anche figura).



Esercizi su disequazioni con il $\boxed{\text{valore assoluto}}$

6.1) Risolvere la disequazione $|x+9|>2$

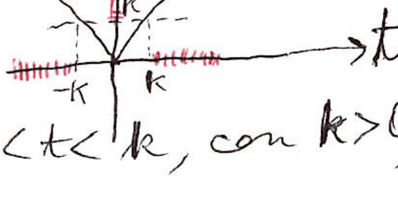
Si ha: $|x+9| = \begin{cases} x+9 & \text{per } x+9 \geq 0, \text{ ossia } x \geq -9 \quad I) \\ -x-9 & \text{per } x+9 \leq 0, \text{ ossia } x \leq -9 \quad II) \end{cases}$

Nel caso I), la nostra disequazione si scrive $x+9>2$, cioè $x>-7$. Dobbiamo tenere conto che $x \geq -9$ perché siamo nel caso I), ma se $x>-7$, allora è automaticamente $x \geq -9$ (che diventa superflua). Pertanto il caso I) fornisce la soluzione $x>-7$.

Nel caso II), la nostra disequazione diventa $-x-9>2$, cioè $-x>11$, ossia $x<-11$. Dobbiamo tenere conto che $x \leq -9$ perché siamo nel caso II), ma se $x<-11$, allora è automaticamente $x \leq -9$. Pertanto il caso II) fornisce la soluzione $x<-11$.

Pertanto la soluzione della disequazione data è costituita dall'unione insiemistica degli insiemi soluzioni del caso I) e del caso II), cioè $x>-7$ oppure $x<-11$, ossia $x \in]-\infty, -11[\cup]-7, +\infty[$.

Allo stesso risultato si arriva se si pone $t=x+9$, $k=2$ e si osserva che $|t|>k$ se e solo se $t>k$ oppure $t<-k$ (nel nostro caso, $x+9>2$ oppure $x+9<-2$, cioè $x>-7$ oppure $x<-11$).



(N.B.: invece, $|t|<k$ se e solo se $-k<t<k$, con $k>0$)

6.2) Risolvere la disequazione $|x+4| > |2x-5|$

Notiamo che $|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{per } x+4 \geq 0, \text{ cioè } x \geq -4 \\ -x-4 & \text{per } x+4 \leq 0, \text{ cioè } x \leq -4 \end{cases}$

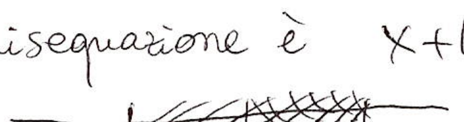
$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5 & \text{per } 2x-5 \geq 0, \text{ cioè } x \geq \frac{5}{2} \\ 5-2x & \text{per } 2x-5 \leq 0, \text{ cioè } x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$

Quindi, quando si considerano insieme i due valori assoluti, ci sono tre insiemi da studiare: $A =]-\infty, -4]$, $B = [-4, \frac{5}{2}]$ $C = [\frac{5}{2}, +\infty[$ (i punti -4 (e $\frac{5}{2}$) possono essere considerati indifferentemente in A o in B (in B o in C))

Nell' insieme A, si ha che $x \leq -4$ ed $x \leq \frac{5}{2}$, e quindi la nostra disequazione si scrive

$-x-4 > 5-2x$, cioè $2x-x > 5+4$, ossia $x > 9$, che non fornisce soluzioni (perché siamo in A, e in A è $x \leq -4$)

Nell' insieme B, si ha che $x \geq -4$ ed $x \leq \frac{5}{2}$, e la disequazione è $x+4 > 5-2x$, cioè $3x > 1$, ossia $x > \frac{1}{3}$



Quindi la disequazione data, in B, fornisce le soluzioni $\frac{1}{3} < x \leq \frac{5}{2}$, cioè $x \in]\frac{1}{3}, \frac{5}{2}]$. Nell'insieme C, si ha $x \geq -4$ ed $x \geq \frac{5}{2}$, quindi la disequazione è $x+4 > 2x-5$, cioè $2x-x < 4+5$, ossia $x < 9$, che fornisce le soluzioni $x \in [\frac{5}{2}, 9[$ (visto che siamo in $C = [\frac{5}{2}, +\infty[$)

Quindi la soluzione globale è $x \in]\frac{1}{3}, \frac{5}{2}] \cup [\frac{5}{2}, 9[=]\frac{1}{3}, 9[$ cioè $1/3 < x < 9$.

ESERCIZI SUL CAMBIO DI BASE NEI LOGARITMI

7.1) Calcolare $\log_4 512$.

Notiamo che sia 4 sia 512 sono potenze di 2. Più precisamente, si ha: $4 = 2^2$, $512 = 2^9$. Quindi scegliamo la base 2. Applicando la formula del cambiamento di base, si ottiene

$$\log_4 512 = \frac{\log_2 512}{\log_2 4} = \frac{9}{2}$$

($\log_2 512 = 9$ perché $2^9 = 512$, $\log_2 4 = 2$ perché $2^2 = 4$)

(N.B.: ricordiamo che, dove ha senso,

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$)

7.2) Calcolare $\log_{\frac{1}{4}} 128$.

Notiamo che $128 = 2^7$, ed inoltre $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$. Quindi $\log_2 128 = 7$, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$. Applicando la formula del cambio di base (con $b = 2$), si ha

$$\log_{\frac{1}{4}} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}.$$

7.3) Calcolare $\log_{27} 81$. Si ha: $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, e quindi $\log_3 27 = 3$, $\log_3 81 = 4$. Applicando la formula del cambio di base (con $b = 3$), si ha

$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{4}{3}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

Esercizio 9. Risolvere le seguenti equazioni:

9.1. $5 \ln x = 0$ se e solo se $\ln x = 0$, cioè $\ln x = \ln 1$
Pertanto si ottiene: $x = 1$

9.2. $\ln(2x) - 9 = 0$ Si ha: $\ln(2x) = 9$
Passando all'esponenziale, si ottiene $2x = e^{\ln(2x)} = e^9$.
La soluzione è quindi $x = \frac{e^9}{2}$

9.3 $3 \ln x + 9 = 0$ Si ha: $\ln x + 3 = 0$, cioè $\ln x = -3$
e quindi $x = e^{-3}$.

9.4 $\ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right) = 0$. Si ha $\ln t = 0$ se e solo se $t = 1$,
Quindi l'equazione data è equivalente a $\frac{x-1}{x+4} = 1$, cioè
$x - 1 = x + 4$ (purché $x \neq -4$), il che è impossibile
(si otterrebbe $-1 = 4$, che è assurdo).

9.5 $\frac{\ln x - 1}{\ln(x+4)} = 0$ Innanzi tutto, deve essere $x > 0$, altrimenti la quantità $\ln x$ non avrebbe senso. Se $x > 0$, allora anche $x + 4 > 0$, e allora, visto che già $x > 0$, la disequazione $x + 4 > 0$ non costituisce una restrizione. Si deve avere anche: $\ln(x+4) \neq 0$ (il denominatore non si deve annullare), cioè $\ln(x+4) \neq \ln 1$ il che è equivalente a dire $x + 4 \neq 1$ cioè $x \neq -3$. Questa condizione è già implicata da $x > 0$. Pertanto il membro di sinistra ha senso se e solo se $x > 0$. Risolviamo ora l'equazione. Si ha: $\ln x - 1 = 0$ se e solo se $\ln x = 1 = \ln e$ se e solo se $x = e$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

Esercizio 10: Risolvere le seguenti disequazioni:

10.1 $\log_{10} x \geq 10$ Si ha, tenendo conto delle proprietà delle funzioni inverse: $x = \log_{10}(10^x) = 10^{\log_{10} x} \geq 10^{10}$

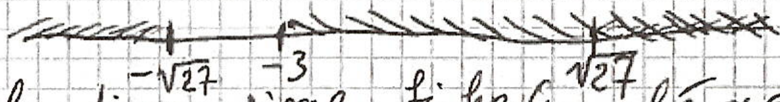
Quindi $x \geq 10^{10}$, cioè $x \in [10^{10}, +\infty[$

10.2 $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 1$ Innanzi tutto, dev'essere $x > 0$, altrimenti il logaritmo non sarebbe definito. Poiché la base è (positiva e) minore di 1, quando si passa all'esponenziale, bisogna cambiare il verso della disuguaglianza, ottenendo:

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ Quindi, in definitiva, si ha: $0 < x \leq \frac{1}{3}$, cioè $x \in]0, \frac{1}{3}]$.

10.3 $\ln x - 7 < -1$ Innanzi tutto, si deve avere $x > 0$. Inoltre, si ha anche $\ln x < 6$, da cui $x = e^{\ln x} < e^6$. In definitiva, la soluzione è: $0 < x < e^6$, cioè $x \in]0, e^6[$.

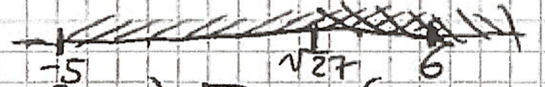
10.4 $\ln(x+3) - \ln(x^2 - 27) \geq 0$. Innanzi tutto, affinché abbia senso fare il logaritmo, dev'essere $x + 3 > 0$, cioè $x > -3$, e anche $x^2 - 27 > 0$, cioè x dev'essere <u>esterno</u> all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione $x^2 - 27 = 0$, che sono $\sqrt{27}$ e $-\sqrt{27}$, quindi $x > \sqrt{27}$ oppure $x < -\sqrt{27}$. In sostanza x, a priori, deve appartenere all'insieme $A =]-3, +\infty[\cap (]-\infty, -\sqrt{27}[\cup]\sqrt{27}, +\infty[) =]\sqrt{27}, +\infty[$.



Risolviamo la disequazione. Si ha (purché $x \in A$):

$\ln(x+3) \geq \ln(x^2 - 27)$, e quindi $x + 3 \geq x^2 - 27$, da cui $x^2 - x - 30 \leq 0$, cioè x dev'essere interno all'intervallo delimitato dalle radici $x_{1,2}$ dell'equazione $x^2 - x - 30 = 0$. Si ha:

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{cases} 6 \\ -5 \end{cases}$



$x \in [-5, 6] \cap A = [-5, 6] \cap]\sqrt{27}, +\infty[=]\sqrt{27}, 6]$, cioè $\sqrt{27} < x \leq 6$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

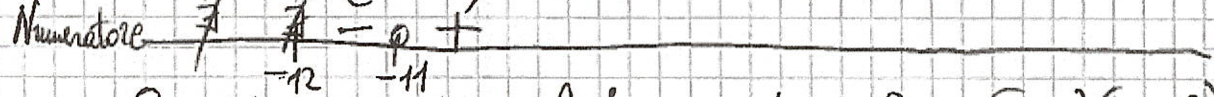
Disequazioni:

10.5 $\ln(x^2) \leq 0$. Innanzi tutto, affinché il logaritmo abbia senso, si deve avere $x^2 > 0$, cioè $x \neq 0$. Risolviamo ora la disequazione. Si ha: $\ln(x^2) \leq \ln 1$, e quindi $x^2 \leq 1$, ossia $x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1) \leq 0$. Pertanto x è interno all' intervallo delimitato dalle radici -1 ed 1, quindi, tenendo conto che dev'essere anche $x \neq 0$, si ottiene la soluzione

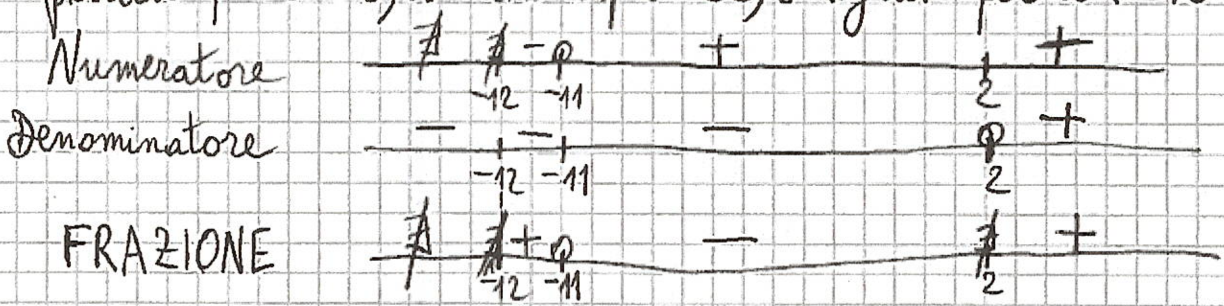
$$x \in [-1, 0[\cup]0, 1].$$

10.6 $\dfrac{\ln(x+12)}{3x-6} \leq 0$

Esaminiamo dapprima il numeratore. È definito per $x+12 > 0$, cioè $x > -12$, in quanto il logaritmo dev'essere ben definito. Si ha, per $x > -12$: $\ln(x+12) > 0$ se e solo se $\ln(x+12) > \ln 1$ se e solo se $x+12 > 1$ cioè $x > -11$. Analogamente, si vede che $\ln(x+12) = 0$ se e solo se $x = -11$ e che $\ln(x+12) < 0$ se e solo se $-12 < x < -11$.



Consideriamo adesso il denominatore, $3x - 6 = 3(x-2)$. È positivo per $x > 2$, si annulla per $x = 2$, è negativo per $x < 2$. Si ha:



L' insieme soluzione della disequazione data 10.6 è l' insieme costituito da (tutti e soli) i valori x che rendono la frazione negativa oppure nulla, cioè $x \in [-11, 2[$ (-11 compreso, 2 escluso), ossia $-11 \leq x < 2$.

Esercizio 10.7)

Risolvere la disequazione $5^{2x} - 5^{x+1} + 6 > 0$

È una disequazione di tipo "esponenziale" che si risolve anche con l'aiuto delle disequazioni di 2° grado.

TRUCCO: Poniamo $5^x = t$. Per le proprietà delle potenze, si ha: $5^{2x} = 5^{x \cdot 2} = (5^x)^2 = t^2$; $5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1 = 5 \cdot 5^x = 5t$.

La disequazione data si esprime come $\boxed{t^2 - 5t + 6 > 0}$. Si ha:

Risolviamo l'equazione associata $t^2 - 5x + 6 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

Siccome $a = 1 > 0$ (ove a è il coefficiente di t^2), allora $t^2 - 5t + 6 > 0$ (che è la nostra disequazione) per valori esterni alle radici 2 e 3, cioè per $t > 3$ oppure (unione insiemistica) $t < 2$. Ma adesso ricordiamoci $t = 5^x$, e quindi si ottiene $5^x > 3$ oppure $5^x < 2$. Adesso, per ricavarci x, "passiamo ai logaritmi": siccome $5 > 1$, le funzioni 5^x, $\log_5 x$ sono STRETTAMENTE CRESCENTI, e quindi le disuguaglianze non cambiano di segno (sarebbero cambiate se la base fosse stata compresa fra 0 e 1 perché in tal caso le funzioni esponenziale e logaritmo sarebbero state strettamente decrescenti). Quindi da $5^x > 3$ si ricava $x = \log_5(5^x) >$ (vedi anche testo adottato, pag. 95) $> \log_5 3$, e analogamente da $5^x < 2$ si deduce $x < \log_5 2$: quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è uguale all'unione insiemistica degli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni. Pertanto la soluzione della disequazione data è $x > \log_5 3$ oppure $x < \log_5 2$, cioè

$$x \in \left]\log_5 3, +\infty\right[\cup \left]-\infty, \log_5 2\right[$$

Esercizio 10.8)

Risolvere la disequazione

$$\log_2(x^2-10x+25) \leq 2\cdot \log_2 3$$

Innanzi tutto, osserviamo che L'ARGOMENTO DEL LOGARITMO DEVE ESSERE POSITIVO. Ciò equivale a risolvere la disequazione $x^2-10x+25>0$.

Studiamo dapprima l'equazione associata $x^2-10x+25=0$

Si ha: $a=1$, $b=-10$, $c=25$ e quindi $\boxed{\Delta}=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot 25 = 100-100=\boxed{0}$. Quindi l'equazione ammette l'unica soluzione $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{10}{2}=5$, e pertanto è $x^2-10x+25>0$ per tutti gli x reali tranne $x=5$, cioè per $\boxed{x\neq 5}$.

Quindi il punto $x=5$ va <u>escluso a priori</u>.

Adesso passiamo alla disequazione vera e propria.

Innanzi tutto osserviamo che per le proprietà dei logaritmi, si ha

$$2\cdot\log_2 3=\log_2(3^2)=\log_2 9,$$ quindi la disequazione è

$$\log_2(x^2-10x+25)\leq \log_2 9$$

A questo punto si può "eliminare" il logaritmo (cioè, passare all'esponenziale) tenendo conto che le disuguaglianze non cambiano di segno, in quanto la base è $2>1$ e quindi le funzioni 2^x, $\log_2 x$ sono strettamente crescenti. Si ottiene

$$2^{\log_2(x^2-10x+25)}\leq 2^{\log_2 9}$$

cioè (v. anche testo adottato, pag. 95)

$$\boxed{x^2-10x+25}=2^{\log_2(x^2-10x+25)}\boxed{\leq}2^{\log_2 9}=\boxed{9}$$ ossia

$x^2-10x+25\leq 9$ cioè $\boxed{x^2-10x+16\leq 0}$. Studiamo l'equazione associata $x^2-10x+16=0$. Si ha:

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}=\begin{cases}8\\2\end{cases}$$

Questa disequazione è soddisfatta per valori interni a $[2,8]$ (estremi inclusi perché c'è il $\leq$), ma bisogna escludere il valore $x=5$ perché in $x=5$ non è definito il logaritmo del 1° membro.

Quindi LA SOLUZIONE È $x\in[2,8]$ ed $x\neq 5$, cioè $x\in[2,5[\,\cup\,]5,8]$.